

21世纪全国本科院校土木建筑类创新型应用人才培养规划教材

材料力学

主　编　章宝华　龚良贵
主　审　扶名福



- 省级精品课程配套教材，教学资源丰富
- 增加与其他力学课程衔接的内容
- 加入后续专业课及实际工程设计施工的有关内容





北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

说　明

本书电子版仅提供给高校任课教师使用，如有任课教师需要全本教材浏览或需要本书课件等相关教学资料，请联系北京大学出版社客服，微信手机同号：15600139606，扫下面二维码可直接联系。

由于教材版权所限，仅限任课教师索取，谢谢！



21 世纪全国本科院校土木建筑类创新型应用人才培养规划教材

材 料 力 学

主　　编　章宝华　龚良贵
副主编　陈　莉
主　　审　扶名福



内 容 简 介

本书是为适应应用型本科的教学改革需要而编写的高等学校规划教材之一，也是江西省省级精品课程“材料力学”的配套教材。本书共分13章，主要内容包括：绪论及基本概念，轴向拉伸、压缩与剪切，截面的几何性质，扭转，弯曲内力，弯曲应力，弯曲变形，应力状态和强度理论，组合变形的强度计算，压杆稳定，能量法，构件的动荷载强度，构件的疲劳强度。本书各章均附有思考题和习题，最后还附有习题参考答案。

本书结构紧凑，语言简练，内容由浅入深，注意联系工程实际，便于教学和自学。本书在编写过程中力求突出以下特色。

(1) 注重与中学力学、大学力学系列课程的联系，适应高中新的课程改革。

(2) 注重与后续专业课和实际工程的联系，加强应用能力的培养。

(3) 注重知识的分类、分层，注重对材料力学研究和计算方法的培养。

本书可作为高等学校工科类本科各专业的教材，也可作为高职高专以及成人教育的教学用书，还可作为广大工程技术人员的自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学/章宝华，龚良贵主编. —北京：北京大学出版社，2011.8
(21世纪全国高等院校实用规划教材)
ISBN 978-7-301-19114-9

Ⅰ.①材… Ⅱ.①章…②龚… Ⅲ.①材料力学—高等学校—教材 Ⅳ.①TB 301

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第119053号

书　　名：材料力学
著作责任者：章宝华　龚良贵　主编
策 划 编 辑：卢　东
责 任 编 辑：卢　东
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-19114-9/TU·0159
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　http://www.pup6.com
电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62750667　出版部62754962
电 子 邮 箱：pup_6@163.com
印　刷　者：
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　19印张　443千字
2011年8月第1版　2019年7月第4次印刷
定　　价：45.00元

前　　言

本书是为适应应用型本科土建类和机械类专业的教学改革需要而编写的高等学校规划教材之一，也是江西省省级精品课程“材料力学”的配套教材。

根据当前教育改革的要求，本书在编写过程中做了如下努力。

(1) 注重与中学力学、大学力学系列课程的联系，适应高中新的课程改革。

结合江西省高中新的课程改革的现状，在课程体系、教学内容上进行了改革和创新。把中学“物理”中的力学和大学“普通物理”中的力学、理论力学、材料力学、结构力学作为力学系列课程的一个相互连通的体系，增加了材料力学与其他力学课程衔接的内容，减少或删除了材料力学与其他力学课程衔接的重复的教学内容，删去了一些日常生活和工程实际中用处很小的内容，精简了次要内容。

(2) 注重与后续专业课和实际工程的联系，加强应用能力的培养。

在材料力学的教学内容、例题、思考题、习题设计中加入了后续专业课(如钢结构、基础工程、机械原理、机械设计等)及实际工程设计施工的有关内容，始终突出“理论联系实际”的方针，注重针对性、实用性和先进性。

(3) 注重知识的分类和分层，注重对材料力学研究和计算方法的培养。

在材料力学的例题、思考题、习题设计中把问题分成若干个类型，每种类型由浅入深，紧紧围绕专业和工程实际，注重培养学生学习和应用材料力学的能力。

(4) 在每章后面都附有小结、思考题和习题，在本书最后还附有习题参考答案，旨在指导学生学习，启发学生思考。

本书由章宝华、龚良贵担任主编，陈莉担任副主编。具体编写分工如下：第 1 章、第 5 章、第 6 章、第 7 章、第 8 章、第 9 章和附录由章宝华(南昌工程学院)编写；第 2 章、第 4 章、第 10 章、第 12 章和习题参考答案由龚良贵(南昌大学)编写；第 3 章、第 11 章和第 13 章由陈莉(南昌工程学院)编写。本书由章宝华统稿，扶名福(南昌工程学院)主审。

在本书的编写过程中，得到了南昌工程学院和南昌大学的大力支持，在此致以诚挚的谢意。

限于作者水平，加之时间仓促，书中难免存在缺点和不妥之处，恳请各位专家、同仁和广大读者批评指正。

编　者

2011 年 5 月

目　录

主 要 符 号

A	面积，自由振动振幅	W	重量，功
b	宽度	W_P	扭转截面系数
C	形心	W_z	弯曲截面系数
d	力偶臂，直径，距离	α	线膨胀系数
E	弹性模量	β	角
f	频率	θ	梁横截面的转角
F	力，荷载	φ	相对扭转角
F_N	轴力	γ	切应变
F_{cr}	临界荷载	Δ	变形、位移
F_S	剪力	δ	厚度，伸长率
G	切变模量	ε	线应变
h	高度	ε_e，ε_P	弹性应变，塑性应变
I_P	极惯性矩	λ	柔度，长细比，频率比
I_y，I_z	截面对 y 轴，z 轴的惯性矩	μ	泊松比，长度系数
k	弹簧刚度系数	σ	正应力
K	应力集中系数	σ_b	抗拉(压)强度
l、L	长度、跨度	σ_{bs}	挤压应力
m	质量	σ_{cr}	临界应力
M	外力偶矩，弯矩	σ_e，σ_P	弹性极限，比例极限
n	转速	σ_t，σ_c	拉应力，压应力
P	功率	$\sigma_{0.2}$	条件屈服应力
q	分布荷载	σ_s	屈服极根
r、R	半径	τ	切应力
T	周期，动能	$[\sigma]$	许用正应力
V_ε	应变能	$[\tau]$	许用切应力

第1章 绪论及基本概念

教学目标

了解材料力学的研究对象
熟练掌握变形固体的基本假设
掌握杆件的基本变形和组合变形的概念
理解杆件的强度、刚度和稳定性要求
了解材料力学的任务
掌握内力、截面法和应力的概念
掌握位移与应变的概念

教学要求

知识要点	能力要求	相关知识
杆件的计算模型	(1) 了解几何形状的简化 (2) 熟练掌握杆件材料的简化	连续函数的概念
杆件的基本变形和组合变形	(1) 理解轴向拉伸和压缩、剪切、扭转、弯曲的概念 (2) 理解组合变形的概念	叠加原理
内力、截面法和应力的概念	(1) 理解内力的概念 (2) 掌握截面法 (3) 理解应力的概念	微分的概念 极限的概念
位移与应变的概念	(1) 理解位移的概念 (2) 理解应变的概念	微分的概念 极限的概念

引言

材料力学是一门很重要的技术基础课，它与土建、机械、航空、交通、水利等工程密切相关，它在基础课和专业课之间起着桥梁作用。材料力学的研究对象主要是杆件。本章主要介绍杆件的基本变形和组合变形的概念，讲述内力、截面法和应力的概念，讲述强度、刚度和稳定性要求及材料力学的任务，为学习后续章节指明学习方向。

1.1 材料力学的研究对象

工程结构或机械的各组成部分，如建筑物的梁、板、柱和机械的传动轴、连杆等，统称为构件(element)。实际工程中，构件的几何形状是各种各样的，简化后可大致归纳为四种：杆(bar)、板(plate)、壳(shell)和块体(body)，如图 1.1 所示。

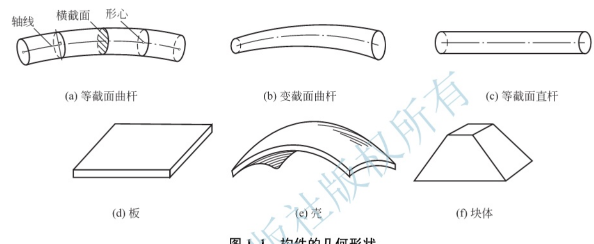


图 1.1　构件的几何形状

材料力学的研究对象主要是杆件(bar)。凡是长度方向尺寸远大于其他两个方向尺寸［一般 $l\geqslant 5b$ 且 $l\geqslant 5h$(或 t)］的构件均称为杆件，如建筑工程中的梁、柱及机械的传动轴等均属于杆类。杆的几何形状可用其轴线(截面形心的连线)和垂直轴线的几何图形(横截面)表示［图 1.1(a)］。按轴线来分类，杆可分为直杆、曲杆和折杆。轴线为曲线的杆称为曲杆［图 1.1(a)、(b)］，轴线为直线的杆称为直杆［图 1.1(c)］，轴线为折线的杆称为折杆。按横截面来分类，杆件又可分为变截面(横截面是变化的)杆［图 1.1(b)］和等截面(各横截面均相同)杆［图 1.1(a)、(c)］。材料力学将着重讨论等截面直杆(等直杆)。

1.2 杆件的计算模型

实际工程结构或机械中的杆件几何形状、材料往往千差万别，要完全按实际工程结构或机械中的每一根杆件的实际情况进行力学分析，将是很困难的，也是不必要的。因此，在计算之前，往往需要对实际杆件加以简化，抓住杆件的主要特点，忽略对所研究问题影响不大的次要因素，用一个简化的计算模型来代替实际杆件。杆件的简化工作通常包括以下两个方面。

(1) 几何形状的简化：常以杆轴线和横截面表示杆件的几何形状。

(2) 杆件材料的简化：把组成杆件的材料视为均匀、连续的变形固体。在外力作用下，发生变形(包括形状和尺寸的改变)的固体称为变形固体(deformable body)或可变固体。变形固体的微观结构和性态都是很复杂的，在分析工程杆件的变形问题时，必须略去材料的次要性质，根据其主要性质作出假设，将它们抽象为一种理想模型。在材料力学中

对变形固体作出如下基本假设。

1）连续性假设(Continuity Assumption)

认为组成固体的物质毫无空隙地充满了固体的整个体积。实际上，从物质结构上看，材料内部存在着不同程度的空隙。但由于构件的尺寸远远大于物质的基本粒子及粒子之间的间隙，这些间隙的存在，在宏观的研究中完全可以忽略不计。根据这一假设，物体的很多力学量可用其位置坐标的连续函数来表示。

2）均匀性假设(Homogenization Assumption)

认为在固体内任何部分的力学性能都完全相同。实际上，就使用最多的金属来说，组成金属的各晶粒的力学性能并不完全相同。但因构件或构件的任一部分都包含为数极多的晶粒，而且无规则地排列，固体的力学性能是各晶粒的力学性能的统计平均值，所以可以认为各部分的力学性能是均匀的。物体的力学性能可用固体内任一部位切取单元体(一般长、宽、高分别为 dx、dy、dz 微分长度的正六面体)来研究。

3）各向同性假设(Isotropy Assumption)

认为固体沿各个方向的力学性能完全相同，即单元体的切取不受方向的影响。具备这种属性的材料称为各向同性材料。对于均匀的非晶体材料，一般都是各向同性的。对于由晶粒组成的固体材料(如金属)，沿不同方向晶粒的力学性能并不相同。但由于构件中包含的晶粒极多，而且各晶粒排列又无规则，在宏观的研究中，并不显示出方向的差异。因此，可以看成是各向同性的。常用的工程材料，如钢、铸铁、玻璃以及浇筑很好的混凝土等，都可以认为是各向同性材料。在各个方向上具有不同力学性能的材料称为各向异性材料，如木材、胶合板、纤维织品及纤维增强复合材料等。本书主要研究各向同性材料。

按照连续、均匀、各向同性假设而理想化了的变形固体称为理想变形固体。采用理想变形固体模型不仅使理论分析和计算得到了简化，而且计算所得的结果在大多数情况下能满足工程精度要求。

除以上三个基本假设外，本书中所研究的问题，仅限于变形的大小远小于构件的原始尺寸的情况。这样，在研究构件的平衡时，就可忽略构件的变形，而按变形前的原始尺寸进行分析计算，对变形的这一限制，称为小变形条件。

试验结果表明，如外力不超过一定限度，绝大多数材料在外力作用下都发生变形，在外力撤除后可恢复原状。但如外力过大，超过一定限度，则外力撤除后只能部分复原，而遗留下一部分不能消失的变形。随着外力撤除而消失的变形称为弹性变形；外力撤除后不能消失的变形称为塑性变形，也称为残余变形或永久变形。

综上所述，在材料力学中，是把组成杆件的材料视为均匀、连续的变形固体，且大多数情况下局限在小变形条件下和弹性变形范围内进行研究。

1.3 杆件的基本变形和组合变形

工程结构或机械中的杆件所受的外力是各种各样的，因此，杆件的变形也是多样的，但杆件变形总体可以归纳为拉、压、剪、扭、弯五种基本变形和由这几种基本变形产生的组合变形形式(如拉弯、压弯、拉扭、压扭、拉弯扭、压弯扭等)。下面介绍杆件基本变形

的受力特征和变形特征。

(1) 轴向拉伸和压缩(axial tension and compression)。杆件的轴向拉伸和压缩是工程中常见的一种变形。如图1.2(a)所示的悬臂吊车，在荷载 F 作用下，AC 杆受到 A、C 两端的拉力作用［图1.2(b)］，BC 杆受到 B、C 两端的压力作用［图1.2(c)］。其受力特点是：作用在杆件上的力，其大小相等、方向相反，作用线与杆件的轴线重合。在这种外力作用下，其变形特点是：杆件的长度发生伸长或缩短。工程实际中起吊重物的钢索、桁架的杆件、液压油缸的活塞杆等的变形，都属于轴向拉伸或压缩变形。

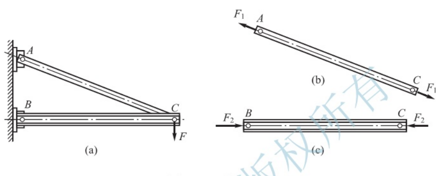


图 1.2　悬臂吊车

(2) 剪切(shear)。图1.3(a)所示为一铆钉连接，在力 F 作用下，铆钉即受剪切。其受力特点是：作用在构件两侧面上横向外力的合力大小相等、方向相反、作用线相距很近。在这种外力作用下，其变形特点是：两力间的横截面发生相对错动［图1.3(b)］，这种变形称为剪切变形。工程实际中常用的连接件，如螺栓、键、销钉等都有可能产生剪切变形。

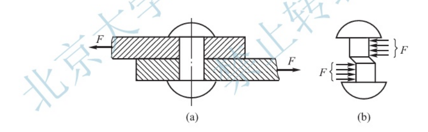


图 1.3　铆钉连接

(3) 扭转(torsion)。图1.4所示的汽车转向轴 AB、图1.5所示的攻螺纹的丝锥等都是扭转变形的实例。

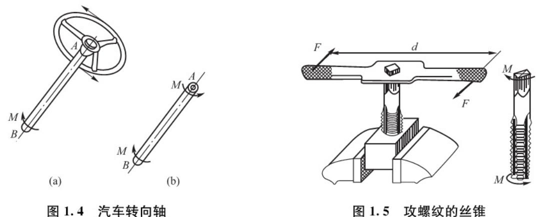


图 1.4　汽车转向轴

图 1.5　攻螺纹的丝锥

这些杆件的受力特点是：杆件两端受到两个在垂直于轴线平面内的力偶作用，两力偶大小相等、转向相反，计算简图可用图 1.6 表示。在这样一对力偶作用下，其变形特点是：各横截面绕轴线发生相对转动，这种变形称为扭转变形。此时，任意两横截面间有相对角位移，这种角位移称为扭转角，图 1.6 中 φ_{AB} 就是截面 B 相对于截面 A 的转角。以扭转变形为主要变形的杆件称为轴。

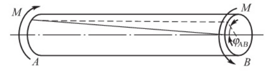


图 1.6 扭转杆件的计算简图

(4) 弯曲(bending)。图 1.7(a)所示的单梁吊车、图 1.8(a)所示的火车车轴等都是弯曲变形的实例。这些杆件的共同特点是：它们都可简化为一直杆，在通过轴线的平面内，受到垂直于杆件轴线的外力(横向力)或外力偶作用。在这样的外力作用下，其变形特点是：杆件的轴线将弯曲成一条曲线，如图 1.7(b)和图 1.8(b)中的虚线所示。这种变形形式称为弯曲。以弯曲为主要变形的杆件称为梁。

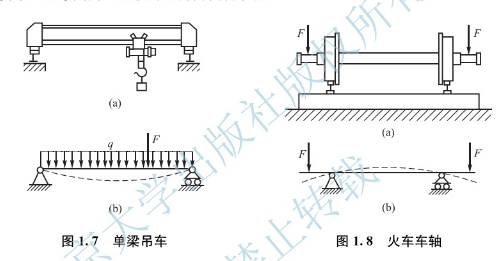


图 1.7 单梁吊车 **图 1.8 火车车轴**

工程实际中的杆件可能同时承受不同形式的外力，常常同时发生两种或两种以上的基本变形，这种变形情况称为组合变形。本书将先分别讨论杆件的每一种基本变形，然后再分析比较复杂的组合变形问题。

1.4 材料力学的任务

1. 构件的强度、刚度和稳定性要求

要想使建筑物或机器设备正常地工作，就必须保证组成它们的每一个构件在荷载作用下都能正常地工作。为了保证构件正常安全地工作，对所设计的构件在力学上有一定的要求，这里归纳为如下三点。

1) 强度要求

强度(strength)是指材料或构件抵抗破坏的能力。材料强度高，是指这种材料比较坚固，不容易破坏；材料强度低，是指这种材料不够坚固，比较容易破坏。强度要求是指构件在规定的荷载作用下应不破坏(塑性屈服或脆性断裂)。例如，在一定荷载作用下，如果构件的尺寸、材料的性能与所受的荷载不相适应，如机器中传动轴的直径太小，当传递的

功率较大时，传动轴就可能因强度不够而发生断裂；起吊货物的绳索过细，而货物过重时，绳索就可能因强度不够而发生断裂；储气罐内压力太大，焊缝就可能因强度不够而被撕裂，导致储气罐爆破。显然这些都是工程上绝不允许的。

2）刚度要求

刚度(stiffness)是指构件抵抗变形的能力。刚度要求是指使构件在荷载作用下产生的变形不超过规定的范围。构件的刚度大，是指构件在荷载作用下不易变形，即抵抗变形的能力大；构件的刚度小，是指构件在荷载作用下易变形，即抵抗变形的能力小。在工程中，即使构件强度足够，如果变形过大，也会影响其正常工作。例如，楼板梁在荷载作用下产生的变形过大，下面的抹灰层就会开裂、脱落；行车梁受外力后，若产生过大的变形，则会使吊车不能正常行驶；车床主轴变形过大，则影响加工精度，破坏齿轮的正常啮合，引起轴承的不均匀磨损，从而造成机器不能正常工作。

3）稳定性要求

受压的细长、中长杆和薄壁构件，当荷载增加时，还可能出现突然失去初始平衡形态的现象，称为丧失稳定，简称失稳。例如，受压的细长直杆当压力达到某一限度时，直杆会突然弯曲，甚至弯曲折断(失去初始的直线状平衡形态)而失去工作能力。因此，细长的受压构件，必须保证其具有足够的稳定性(stability)。稳定性要求就是要求这类受压构件应有足够的保持原有平衡形态的能力。

2. 材料力学的任务

每个构件均应满足强度、刚度和稳定性这三方面的要求。但对于某些具体构件来说，往往只有一个方面的要求是控制条件，只要控制条件满足后，其他方面的要求也能自行满足。

在工程设计中，构件不仅要满足强度、刚度和稳定性要求，同时还必须满足经济方面的要求。前者往往要求加大构件的横截面，多用材料，用强度高的材料；而后者却要求节省材料，避免大材小用、优材劣用等，应尽量降低成本。因此，安全与经济之间是存在矛盾的。材料力学是研究构件(主要是杆件)强度、刚度和稳定性的学科，它的任务是在保证杆件既安全又经济的前提下，为杆件选择合适的材料、确定合理的截面形状和尺寸，提供必要的理论基础和计算方法。

当然，在工程设计中解决安全适用和经济之间的矛盾，仅仅从力学观点考虑是不够的，还需综合考虑其他方面的条件，如便于加工、拆装和使用等。

构件满足强度、刚度和稳定性的问题与其所选用材料的力学性质有关，而材料的力学性质必须通过试验来测定。此外，还有些单靠现有理论解决不了的问题，必须通过试验来解决。因此，试验研究和理论分析同样重要，它们都是完成材料力学任务所必需的手段。

另外，随着生产的发展、新材料的使用、荷载情况以及工作条件的复杂化等，对构件的设计不断提出新的问题。例如，很多构件需要在随时间而交替变化的荷载作用下，或长期在高温环境下工作等，在这些情况下，对构件进行强度、刚度和稳定性的计算时，就得考虑更多的影响因素。又如，航天、航空事业的发展，出现了复合材料。为了解决这些新的问题，近年来产生了断裂力学和复合材料力学。这些学科的产生，既促进了生产的发展，又丰富了材料力学的内容。

1.5 内力、截面法和应力的概念

1. 内力(Internal Force)

物体因受到外力作用而变形，其内部各部分之间的相对位置要发生改变，与此同时，各部分之间的相互作用力也会发生变化。这种因外力作用而引起的物体内部相互作用力的改变量，称为“附加内力”，简称内力。在材料力学里，研究杆件变形时所说的内力都是这样的附加内力。对于材料性能和截面形状一定的杆件，内力越大，变形也就越大。当内力超过一定限度时，杆件就会发生破坏。所以，内力的计算及其在杆件内的变化情况，是分析和解决杆件强度、刚度和稳定性等问题的基础。

2. 截面法(Method of Sections)

截面法是计算内力的基本方法。

由于内力存在于杆件内部，为了求出杆件某一截面上的内力，可用一假想平面，沿此截面将杆件截开，分成两部分，这样内力就转化为外力而显示出来。任取一部分为研究对象，可用静力平衡条件求内力的大小和方向。这种方法称为截面法。在材料力学中，习惯把截面上分布内力系向截面形心简化后的结果——主矢与主矩，统称为内力。

图 1.9(a)所示的物体受多个外力作用，处于平衡状态。若要求任一截面 $m-m$ 上的内力，可以假想用 $m-m$ 平面将物体截分为 A、B 两部分［图 1.9(b)］，此时 A 部分的 $m-m$ 截面上将作用着 B 部分对它的作用力。这种作用力是以分布形式布满该截面，利用 A 部分的平衡可以求出这种分布力的合力。同样，如果以 B 部分为研究对象，也可以求出 A 部分对其作用的分布力的合力。根据作用与反作用定律，这两组合力大小相等而方向相反。

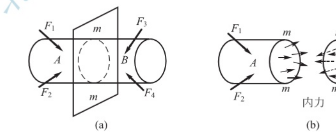


图 1.9 内力与外力

截面法是力学中研究受力构件内力的一个基本方法。其求解步骤可以概括为四个字：截、留、代、平。

截：在欲求内力的截面处，沿该截面假想地将杆件截分为两部分。

留：保留其中任何一部分为研究对象，抛弃另一部分。

代：用内力代替抛弃部分对保留部分的作用。

平：根据保留部分的平衡条件，确定该截面内力的大小和方向。

例 活塞在力 F_1、F_2 和 F_3 的作用下处于平衡状态，如图 1.10(a)所示。试求 1-1 截面上的内力。设 $F_1=100\text{kN}$、$F_2=30\text{kN}$ 和 $F_3=70\text{kN}$。

解：（1）取研究对象。假想沿 1－1 截面将活塞分为两部分，取其中任一部分为研究对象。现取左端为研究对象。

（2）画受力图。内力系用其合力表示。由于研究对象处于平衡，所以 1－1 截面的内力应与 F_1 共线［图 1.10(b)］，并组成共线力系。

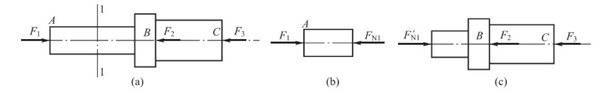


图 1.10　例 1.1 图

（3）列平衡方程。由

$$\sum F=0,\quad F_1-F_{N1}=0$$

得

$$F_{N1}=F_1$$

1－1 截面的内力，也可通过取右端为研究对象［图 1.10(c)］求解，由平衡方程

$$\sum F=0,\quad F'_{N1}-F_2-F_3=0$$

$$F'_{N1}=F_2+F_3=30+70=100(\mathrm{kN})=F_{N1}$$

F_{N1} 与 F'_{N1} 是互为作用力与反作用力的关系，两者数值相等，同为 1－1 截面的内力。因此，为了方便，求内力时可取受力情况简单的一端为研究对象。

3. 应力(Stress)的概念

上面讨论了构件内力的概念及计算方法。但是，仅仅知道内力的大小还不能判断构件的强度是否足够。经验告诉我们，有两根材料相同的拉杆，一根较粗，一根较细，在相同的轴向拉力 F 作用下，内力相等，当力 F 增大时，细杆必先断。这是由于内力仅代表内力系的总和，而不能表明截面上各点受力的强弱程度。为了解决强度问题，不仅需要知道构件可能沿哪个截面破坏，而且还需要知道截面上哪个点处最危险。构件在一般受力情况下，其截面上的内力并不是均匀分布的。而且，大小相同的内力以不同方式分布在截面上，产生的效果也不同。这样，就需要进一步研究内力在截面上各点处的分布情况，因而引入了应力的概念，以确切地描述内力在截面上的分布规律及某一点处的强度问题。

如图 1.11(a)所示的构件，受任意力作用，$m-m$ 为任意截面。在截面 $m-m$ 上任一点 O 的周围取一微小面积 ΔA，设在 ΔA 上分布内力的合力为 ΔF，则 ΔF 与 ΔA 的比值称为 ΔA 上的平均应力，用 p_m 表示，即

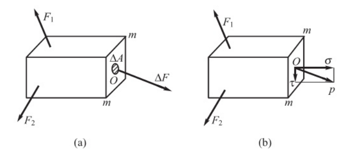


图 1.11　内力和应力

$$p_m = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

一般情况下，内力在截面上的分布并非均匀，ΔF 及平均应力 p_m 均随 ΔA 的大小而变化。

为了确切地描述 O 点处内力的分布集度，应使 ΔA 面积缩小并趋近于零，则平均应力 p_m 的极限值称为 $m-m$ 截面上 O 点处的全应力，并用 p 表示，即

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

全应力 p 相当于一个矢量，使用中常将其分解成垂直于截面的分量 σ 和与截面相切的分量 τ。σ 称为正应力，τ 称为切应力，如图 1.11(b)所示。

在国际单位制中，应力的单位为 Pa(帕)，$1Pa=1N/m^2$。在工程实际中，这一单位太小，常用 MPa(兆帕)和 GPa(吉帕)，其关系为 $1MPa=10^6Pa$，$1GPa=10^9Pa$。

4. 位移与应变的概念

材料力学是研究变形体的，在构件受外力作用后，整个构件及构件的每个局部一般都要发生形状与尺寸的改变，即产生了变形。变形的大小是用位移和应变这两个量来度量的。

1) 位移(Displacement)

位移是指位置的改变，即构件发生变形后，构件中各质点及各截面在空间位置上的改变。位移可分为线位移和角位移。在图 1.12 中，构件上的 A 点在构件变形后移到了 A' 点，A 与 A' 的连线 AA' 就称为 A 点的线位移，而构件上的平面在构件变形后所转过的角度则称为角位移。例如，图中的右截面 $m-m$ 变形后移到了 $m'-m'$ 的位置，其转过的角度 θ 就是 $m-m$ 面的角位移。

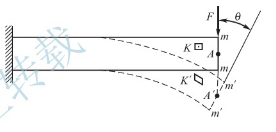


图 1.12 位移

不同点的线位移及不同截面的角位移一般都是各不相同的，它们都是位置的函数。

2) 应变(Strain)

构件在外力作用下的变形分为形状的改变及尺寸的改变，因此应变有线应变和切应变两种(图 1.13)。

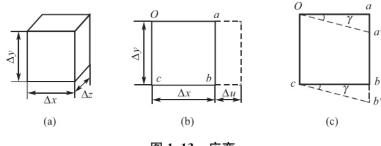


图 1.13 应变

(1) 线应变(normal strain)：如图 1.13(b)所示，沿 x 方向原长为 Δx，变形后变为 $\Delta x+\Delta u$，Δu 就是沿 x 方向的伸长量，称为绝对伸长。但 Δu 还不足以说明沿 x 方向的伸缩程度，因为 Δu 还与边长 Δx 的大小有关，因而取相对伸长 $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ 来度量沿 x 方向的变形。$\frac{\Delta u}{\Delta x}$

实际上是在 Δx 范围内单位长度上的平均伸长量，仍与所取的 Δx 的长短有关，取下列极限

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

称为 K 点处沿 x 方向的线应变。构件伸长时，线应变为正值，反之为负值。

(2) 切应变(shearing strain)：如图 1.13(c)所示，棱边 Oa 和 Oc 间的夹角变形前为直角，变形后该直角减小，角度的改变量 γ，称为切应变。夹角减小时，切应变为正值，反之为负值。

线应变 ε_x 和切应变 γ 是度量一点处变形程度的两个基本量。它们都是无限小量，且均为无量纲的量。

小　　结

1. 材料力学的研究对象主要是杆件

材料力学的研究对象主要是杆件。凡是长度方向尺寸远大于其他两个方向尺寸［一般 $l \geqslant 5b$ 且 $l \geqslant 5h$(或 t)］的构件称为杆件。如建筑工程中的梁、柱以及机械的传动轴等均属于杆。

2. 变形固体的基本假设

在材料力学中对变形固体作出如下基本假设。

(1)连续性假设；(2)均匀性假设；(3)各向同性假设。

3. 杆件的基本变形和组合变形

杆件上的外力作用方式各种各样，因而杆件的变形形式也各不相同，但杆件变形总可以归纳为拉、压、剪、扭、弯五种基本变形和几种基本变形同时产生的组合变形形式(如拉弯、压弯、拉扭、压扭、拉弯扭、压弯扭等)。

4. 材料力学的任务

材料力学是研究构件(主要是杆件)强度、刚度和稳定性的学科，它的任务是在保证杆件既安全又经济的前提下，为杆件选择合适的材料、确定合理的截面形状和尺寸，提供必要的理论基础和计算方法。

5. 内力、截面法和应力的概念

因外力作用而引起的物体内部相互作用力的改变量，称为“附加内力”，简称内力。在材料力学中，习惯把截面上分布内力系向截面形心简化后的结果——主矢与主矩，统称为内力。

由于内力存在于杆件内部，为了求出杆件某一截面上的内力，就必用一假想平面，沿此截面将杆件截开，分成两部分，这样内力就转化为外力而显示出来。任取一部分为研究对象，可用静力平衡条件求内力的大小和方向。这种方法称为截面法。截面法是计算内力的基本方法。

单位面积所受的内力称为应力。应力能确切地描述内力在截面上的分布规律及某一点处的强度问题。应力又分为正应力和切应力。

6. 位移与应变的概念

位移是指位置的改变，即构件发生变形后，构件中各质点及各截面在空间位置上的改

变。位移可分为线位移和角位移。

构件在外力作用下的变形分为形状的改变及尺寸的改变，因此应变有线应变和切应变两种。

思 考 题

1.1 材料力学中对变形体作了哪些基本假设？为什么要作这些假设？它们的依据是什么？

1.2 杆、板、壳、块体的区别是什么？

1.3 根据可变形固体的均匀性假设，从物体内任一点处任意方向取出的体积单元，其力学性质均相同。因此，均匀性假设实际上包含了各向同性假设，试问上述说法是否正确？为什么？

1.4 在外力作用下，杆件的基本变形形式有哪几种？它们各有何特点？试举例说明。

1.5 刚体静力学中力的可传性原理是否可应用于变形体？为什么？

1.6 如图 1.14(a)、(b)所示两个矩形微体，虚线表示其变形。试问微体左下 A 角处的切应变 γ 分别为何值？

1.7 试判断如图 1.15 所示杆件哪些属于轴向拉伸或压缩？

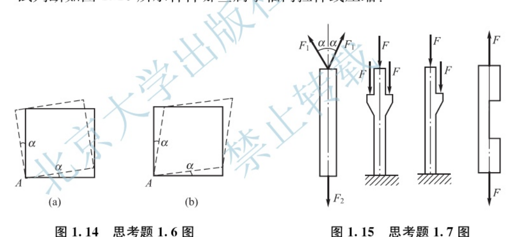


图 1.14 思考题 1.6 图

图 1.15 思考题 1.7 图

习 题

1.1 试求如图 1.16 所示结构 $m-m$ 和 $n-n$ 两截面上的内力，并指出 AB 和 BC 两杆的变形属于何类基本变形。

1.2 在如图 1.17 所示简易吊车的横梁上，F 力可以左右移动，试求截面 1-1 和 2-2 上的内力及其最大值。

1.3 如图 1.18 所示拉伸试样上 A、B 两点的距离 l 称为标距。受拉力作用后，用变形仪量出两点距离的增量 $\Delta l = 5\times10^{-2}$mm。若 l 的原长为 $l=100$mm，试求 A 与 B 两点间的平均应变 ε_m。

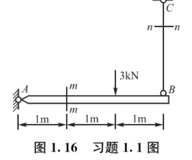


图 1.16 习题 1.1 图

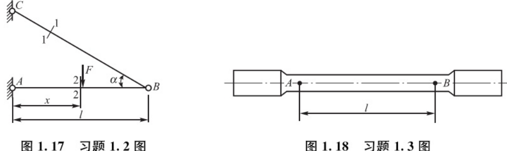


图 1.17　习题 1.2 图　　　　图 1.18　习题 1.3 图

1.4　如图 1.19 所示三角形薄板因受外力作用而变形，角点 B 垂直向上的位移为 0.03mm，但 AB 和 BC 保持直线。试求沿 OB 的平均应变 ε_m，并求 AB、BC 两边在 B 点的角度改变。

1.5　圆形薄板的半径为 R，变形后 R 的增量为 ΔR，如图 1.20 所示。若 $R=80$mm，$\Delta R=3\times10^{-3}$mm，试求沿半径方向和外圆圆周方向的平均应变。

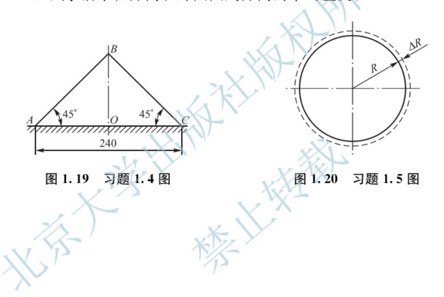


图 1.19　习题 1.4 图　　　　图 1.20　习题 1.5 图

第2章 轴向拉伸、压缩与剪切

教学目标

掌握求内力的截面法及轴力计算规则
掌握轴力图的绘制
掌握强度计算
理解胡克定律
掌握变形计算
理解材料的力学性质
掌握连接件的实用强度计算

教学要求

知识要点	能力要求	相关知识
轴力及轴力图	(1) 掌握求内力的截面法及轴力计算规则 (2) 熟练绘制轴力图	平衡的概念
强度计算	(1) 理解应力的概念 (2) 掌握强度条件的应用	微分的概念 极限的概念
变形的计算	(1) 理解胡克定律及其适用条件 (2) 掌握轴向拉、压杆变形的计算 (3) 理解泊松比、弹性模量的意义	弹性理论 材料的力学实验
材料的力学性质	(1) 理解低碳钢拉伸试验过程 (2) 理解比例极限、弹性极限、屈服极限和强度极限的意义 (3) 理解塑性材料和脆性材料的区别	土木工程材料
连接件的实用强度计算	(1) 理解切应力和挤压应力的概念 (2) 掌握强度条件的应用	微分的概念 极限的概念

引言

轴向拉伸和压缩是杆件的基本变形之一。在本章中，主要讨论杆件在轴向拉(压)力的作用下，内力、应力及变形的计算，理解材料的力学性质，重点掌握强度条件的建立及其应用。从本章开始，以后的各章研究对象都是变形物体，对变形物体的基本假设在绪论中都有讲解。本章的学习非常重要，它将为后面几章的学习奠定基础，建议同学们注重学习和掌握基本概念和基本方法。

工程中有许多构件，例如，钢木组合桁架中的钢拉杆(图 2.1)，内燃机在燃气爆发充程中的连杆(图 2.2)，这些杆件的外形虽然不同，加载方式各异，但它们有一个共同特点是：作用在杆件上的外力或外力合力的作用线与杆件的轴线重合。杆件的变形是沿着轴线方向伸长或缩短的，这种变形称为轴向拉伸或压缩。若把这些杆件的形状和受力情况进行简化，都可以简化成如图 2.3 所示的计算简图，图中虚线表示变形后的形状。在研究轴压拉、压杆的应力与强度、变形与刚度之前，有必要先分析杆件的内力。

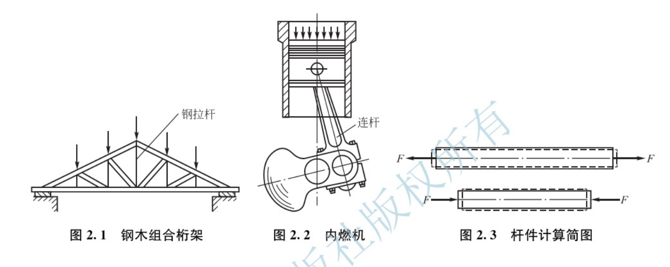


图 2.1　钢木组合桁架　　图 2.2　内燃机　　图 2.3　杆件计算简图

2.1 轴力及轴力图

1. 轴力(Axial Force)

图 2.4(a)所示为一轴向拉伸杆件，欲求任意横截面 $m-m$ 上的内力，可采用截面法。假想地沿横截面 $m-m$ 将杆件截分成两段，保留左段［图 2.4(b)］，抛弃右段，右段对左段的作用，用内力来代替，其合力为 F_N。由于杆件原来处于平衡状态，故截开后各部分仍应保持平衡。由左段的平衡条件

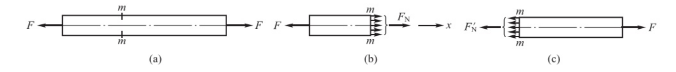


图 2.4　截面法求轴向拉伸杆件的内力

$$\sum F_x=0,\quad F_N-F=0$$

得

$$F_N=F$$

若保留右段，抛弃左段，则左段对右段的作用力为 F_N'，由右段的平衡条件

$$\sum F_x=0,\quad F_N'-F=0$$

得

$$F_N'=F$$

对于轴向拉伸(压缩)的杆件，由于外力合力的作用线与杆件轴线重合，因而内力的合

力 F_N(或 F'_N)的作用线也必与杆件轴线重合，即横截面上内力的方向均垂直于横截面，其合力作用线通过截面形心，这样的内力称为轴力。

由上述计算可见，保留左段或右段，所求得的内力大小相等而方向相反，这是由于它们是作用力和反作用力的关系。

为了使取左段和取右段研究时，求得的轴力不仅有相同的数值，而且有相同的正负号，通常根据杆件的变形(而不是按轴力的方向是否与坐标轴方向一致)规定轴力的正负号：拉伸时的轴力为正，即轴力 F_N(或 F'_N)背离截面时为正，此时的轴力称为拉力，如图 2.4(b)、(c)所示；压缩时的轴力为负，即轴力 F_N(或 F'_N)指向截面时为负，此时的轴力称为压力。这样，无论保留哪一段，求得轴力的正负号都相同。以后讨论中，不必区别 F_N 与 F'_N，一律表示为 F_N。通常在计算时都假设轴力为正，这样，只需根据计算结果的正负号便可确定轴力是拉力还是压力。

2. 轴力图(Axial Force Diagram)

当杆件受多个轴向外力作用时，杆件各部分横截面上的轴力不尽相同。为了表明轴力随横截面位置变化的情况，可绘制轴力图。即按选定的比例尺，用平行于杆件轴线的坐标表示横截面的位置，用垂直于杆件轴线的坐标表示横截面上的轴力，绘出表示轴力与横截面位置关系的图线，这种图线称为轴力图。

例 2.1 一等直杆受四个轴向外力作用，如图 2.5(a)所示，试求杆件横截面 1-1、2-2、3-3上的轴力，并作轴力图。

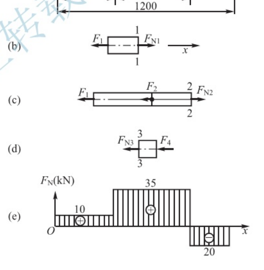


图 2.5 等直杆轴力图

解：(1) 用截面法确定各段的轴力。在 AB 段内，沿截面 1-1 假想地将杆截分成两段，取左段为研究对象，假设横截面上的轴力为正［图 2.5(b)］。由平衡条件

$$\sum F_x=0,\quad F_{N1}-F_1=0$$

得

$$F_{N1}=F_1=10(\text{kN})$$

F_{N1}是正值，说明所设轴力为拉力是正确的。

同理，计算横截面 2-2 上的轴力，由截面 2-2左边一段［图 2.5(c)］的平衡条件

$$\sum F_x=0,\quad F_{N2}-F_1-F_2=0$$

得

$$F_{N2}=F_1+F_2=35(\text{kN})$$

计算横截面 3-3 上的轴力 F_{N3}时，为了计算方便，可取右段为研究对象，如图2.5(d)所示。由平衡条件

$$\sum F_x=0,\quad -F_4-F_{N3}=0$$

得

$$F_{N3}=-F_4=-20(\text{kN})$$

F_{N3}是负值，说明 F_{N3}的实际方向与假设的方向相反，即为压力。

由以上用截面法和平衡条件可得出轴力计算规则：轴向拉(压)杆上某截面的轴力 F_N

等于该截面任意一侧所有外力在杆轴线上的投影代数和。当外力在杆轴线方向分力箭头离开该截面时产生正投影，当外力在杆轴线方向分力箭头指向该截面时产生负投影。

有了轴力计算规则，作轴向拉(压)杆轴力图就可不用截面法取脱离体，由平衡条件求轴力，只需用轴力计算规则就可直接算出各杆段上控制截面轴力，作轴力图。

(2) 作轴力图。用平行于轴线的 x 轴表示横截面的位置，与 x 轴垂直的坐标表示对应横截面的轴力，按比例作出轴力图，如图 2.5(e)所示。由此图可知，数值最大的轴力发生在 BC 段。

2.2 轴向拉伸、压缩时的应力

确定了内力，还不足以解决构件的强度问题，还必须知道截面单位面积所受的内力，即应力。

1. 轴向拉伸、压缩时横截面上的正应力(Normal Stress on Cross Section)

为了求得横截面上任意一点的应力，必须了解内力在截面上的分布规律。由于内力和变形之间存在一定的物理关系，故可通过试验观察变形的办法来了解内力的分布。

取一等截面直杆，试验前在杆件表面上画两条垂直于杆轴线的横向直线 ab 和 cd，并在两横线间画几条平行于杆轴的纵线，如图 2.6(a)所示；然后在杆件两端施加一对轴向拉力 F，使杆件发生变形。此时可以观察到直线 ab 和 cd 分别平移到 $a'b'$ 和 $c'd'$ 位置，且仍垂直于杆件的轴线，如图 2.6(b)所示。根据这一变形现象，通过由表及里的推理，可作如下假设：变形前的横截面，变形后仍为平面，仅沿轴线产生了相对平移，并仍与杆的轴线垂直。这个假设称为平面假设。平面假设意味着拉杆的任意两个横截面之间所有纵向线段的伸长相同。由材料的均匀性假设，可以推断出内力在横截面上的分布是均匀的，即横截面上各点处的应力大小相等，其方向与轴力 F_N 一致，垂直于横截面，称为正应力，如图 2.6(c)所示。设杆件横截面面积为 A，则正应力的计算公式为

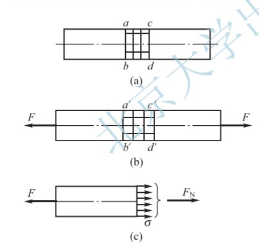


图 2.6 拉杆横截面上的正应力

$$\sigma=\frac{F_N}{A} \tag{2-1}$$

式(2-1)同样适用于轴向受压杆。正应力的正负号与轴力相对应，即拉应力为正，压应力为负。

例 2.2 简易旋臂式吊车如图 2.7(a)所示。已知斜杆 AB 直径为 $d=20$mm 的钢材，荷载 $W=15$kN，不计两杆自重。求当 W 移到 A 点时，斜杆 AB 横截面上正应力。

解：(1) 受力分析。当 W 移到 A 点时，斜杆 AB 受到的拉力最大，设其值为 F_{max}。取 AC 杆为分离体，在不计杆件自重及连接处的摩擦时，AC 杆受力如图 2.7(c)所示。根据平衡方程

$$\sum M_C=0, \quad F_{max}\sin\alpha \cdot AC-W \cdot AC=0$$

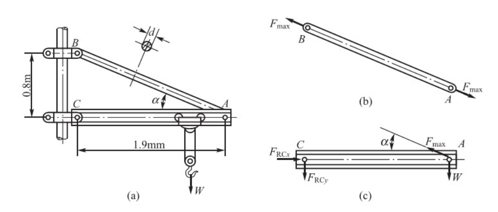


图 2.7　简易旋臂式吊车

解得

$$F_{max}=\frac{W}{\sin\alpha}$$

由三角形 ABC 求出

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{0.8}{\sqrt{0.8^2+1.9^2}}=0.388$$

故有

$$F_{max}=\frac{W}{\sin\alpha}=\frac{15}{0.388}=38.7(\text{kN})$$

(2) 求应力。斜杆 AB 横截面上正应力为

$$\sigma=\frac{F_N}{A}=\frac{F_{max}}{A}=\frac{38.7\times10^3}{\frac{\pi}{4}\times20^2\times10^{-6}}=123\times10^6(\text{Pa})=123(\text{MPa})$$

例 2.3　长为 b、内径 $d=200\text{mm}$、壁厚 $\delta=5\text{mm}$ 的薄壁圆环，承受 $p=2\text{MPa}$ 的内压力作用，如图 2.8(a)所示。试求圆环径向截面上的拉应力。

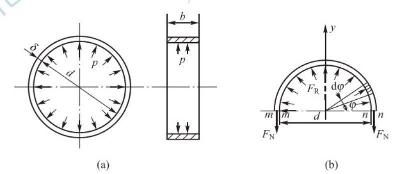


图 2.8　薄壁圆环

解：薄壁圆环在内压力作用下要均匀胀大，故在包含圆环轴线的任意径向截面上作用有相同的法向拉力 F_N。为求拉应力 σ，可假想地用一直径平面将圆环截分为二，并研究留下的半环［图 2.8(b)］的平衡。半环上的内压力沿 y 方向的合力为

$$F_R=\int_0^{\pi}\left(pb\cdot\frac{d}{2}\mathrm{d}\varphi\right)\sin\varphi=\frac{pbd}{2}\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=pbd$$

其作用线与 y 轴重合。

因壁厚远小于内径 d，故可近似地认为在环的每一个横截面 $m-m$ 或 $n-n$ 上各点处的

正应力相等。又由对称关系可知，此两横截面上的正应力必组成数值相等的合力。由平衡方程$\sum F_y=0$，求得

$$F_{\rm N}=\frac{F_{\rm R}}{2}$$

于是圆环径向截面上的拉应力为

$$\sigma=\frac{F_{\rm N}}{A}=\frac{pbd}{2b\delta}=\frac{pd}{2\delta}=\frac{2\times10^6\times0.2}{2\times5\times10^{-3}}=40\times10^6(\mathrm{Pa})=40(\mathrm{MPa})$$

2. 轴向拉伸、压缩时斜截面上的应力(Stress on An Inclined Plane)

轴向拉压杆的破坏有时不沿着横截面，例如铸铁压缩破坏时，其断面与轴线大致成45°。因此，为了全面分析拉压杆的强度，除了横截面上正应力以外，还需要进一步研究其他斜截面上的应力。

取一受轴向拉伸的等直杆，今研究与横截面成α角的斜截面$n-n$［图2.9(a)］上的应力情况。运用截面法，假想地将杆沿$n-n$截面切开，并研究左段的平衡，如图2.9(b)所示，则得到此斜截面$n-n$上的内力F_α为

$$F_\alpha=F \tag{2-2}$$

仿照求解横截面上正应力分布规律的过程，同样可以得到斜截面上各点处的全应力p_α相等的结论。于是有

$$p_\alpha=\frac{F_\alpha}{A_\alpha} \tag{2-3}$$

设横截面面积为A，则斜截面面积为$A_\alpha=\dfrac{A}{\cos\alpha}$，将此关系代入式(2-3)，并利用式(2-2)，可得

$$p_\alpha=\frac{F_\alpha}{A_\alpha}=\frac{F}{A/\cos\alpha}=\frac{F}{A}\cos\alpha=\sigma\cos\alpha \tag{2-4}$$

式中，$\sigma=\dfrac{F}{A}$为横截面上任一意点处的正应力。

将斜截面上任意一点K处的全应力p_α分解为垂直于斜截面的正应力σ_α和沿斜截面的切应力τ_α，这样，就可以用σ_α及τ_α两个分量来表示$n-n$斜截面上任意一点K的应力情况，如图2.9(c)所示。将p_α分解后，并利用式(2-4)，得到

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\alpha&=p_\alpha\cos\alpha=\sigma\cos^2\alpha=\frac{\sigma}{2}(1+\cos2\alpha)\\ \tau_\alpha&=p_\alpha\sin\alpha=\sigma\cos\alpha\sin\alpha=\frac{\sigma}{2}\sin2\alpha\end{aligned}\right\} \tag{2-5}$$

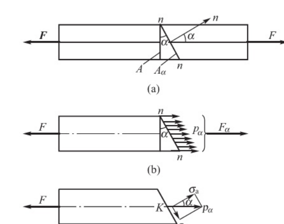


图2.9　拉杆斜截面上的应力

由式(2-5)可见，σ_α与τ_α都是α角的函数，所以截面的方位不同，截面上的应力也就不同。讨论：

(1) 当$\alpha=0°$时，斜截面$n-n$成为垂直于轴线的横截面，正应力达到最大值，即$\sigma_\alpha=\sigma_{\max}=\sigma$，而切应力为零；

(2) 当$\alpha=45°$时，切应力达到最大值，即

$\tau_\alpha=\tau_{\max}=\frac{\sigma}{2}$，而正应力不等于零，为 $\sigma_\alpha=\frac{\sigma}{2}$；

（3）当 $\alpha=90°$ 时，正应力 σ_α 和切应力 τ_α 均为零，表明轴向拉压杆在平行于杆轴的纵向截面上无任何应力。

在应用式(2-5)时，应注意 σ_α、τ_α 和角度 α 的正负号。正应力 σ_α 仍以拉应力为正，压应力为负；切应力 τ_α 的正负，以斜截面外法线按顺时针方向转过 90°后与其所示方向一致时为正，反之为负；α 角则以横截面外法线转到斜截面外法线时，逆时针转为正，顺时针转为负。

2.3 轴向拉伸、压缩时的变形

轴向拉伸与压缩时，直杆的主要变形是轴向尺寸的改变，同时其横向尺寸也要发生改变。

1. 纵向变形(Axial Deformation)

设等直圆截面杆原长为 l，直径为 d，受轴向拉力 F 后，变形为如图 2.10 虚线所示的形状。纵向长度由 l 变为 l_1，则杆的纵向绝对变形为

$$\Delta l=l_1-l$$

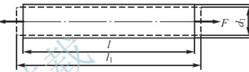


图 2.10 轴向受拉杆的变形

绝对变形不能准确地衡量杆件的变形程度，为此引入相对变形的概念。将绝对变形除以原长记为

$$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l}=\frac{l_1-l}{l} \tag{2-6}$$

ε 表示杆件单位长度的纵向变形，称为纵向线应变(axial strain)。它是一个无量纲的量，拉伸时为正，压缩时为负。

2. 横向变形(Lateral Deformation)

圆杆受轴向拉力 F 后，横向尺寸由 d 变为 d_1，如图 2.10 所示。则杆的横向绝对变形为

$$\Delta d=d_1-d$$

横向线应变(lateral strain)为

$$\varepsilon'=\frac{\Delta d}{d}=\frac{d_1-d}{d} \tag{2-7}$$

ε'的正负号与 ε 相反，即拉伸时为负，压缩时为正。

3. 泊松比(Poisson's Ratio)

实验表明，对于同一种材料，当应力不超过某一限度时，横向线应变 ε'与纵向线应变 ε 之比的绝对值为一常数，即

$$\mu=\left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|=-\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \tag{2-8}$$

或

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon \tag{2-9}$$

式中，μ 称为泊松比或横向变形系数，是一个无量纲的量。

4. 胡克定律(Hooke's Law)

实验表明，受轴向拉伸或压缩的杆件，当外力不超过某一限度时，材料在弹性范围之内工作，其轴向绝对变形 Δl 与轴力 F_N 及杆件原长 l 成正比，与杆件的横截面面积 A 成反比。即

$$\Delta l \propto \frac{F_N l}{A}$$

引进比例常数 E，得

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA} \tag{2-10}$$

该式称为胡克定律。其中常数 E 称为材料的弹性模量(modulus of elasticity)。弹性模量 E 和泊松比 μ 都是材料的弹性常数，其数值随材料的不同而异，可由实验测定。常用工程材料的弹性模量和泊松比约值在表 2-1 中给出。

表 2-1　常用工程材料的弹性模量和泊松比约值

材料名称	牌号	E(GPa)	μ
低碳钢	Q235	200～210	0.24～0.28
中碳钢	45	205	
低合金钢	16Mn	200	0.25～0.30
合金钢	40CrNiMoA	210	
灰口铸铁		60～162	0.23～0.27
球墨铸铁		150～180	
铝合金	LY12	71	0.33
硬质合金		380	
混凝土		15.2～36	0.16～0.18
木材(顺纹)		9～12	

由式(2-10)可以看出，当其他条件不变时，弹性模量 E 越大，杆件的绝对变形 Δl 就越小，所以 E 是衡量材料抵抗弹性变形能力的一个指标。当 F_N、l 值不变时，EA 值越大，绝对变形 Δl 就越小。故 EA 表示杆件抵抗拉(压)变形的能力，称为杆的抗拉(压)刚度(rigidity)。

将 $\frac{F_N}{A} = \sigma$ 和 $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$ 代入式(2-10)，则得胡克定律的另一表达形式

$$\sigma = E\varepsilon \tag{2-11}$$

因此，胡克定律又可表述为：当应力不超过某一极限值时，材料在弹性范围之内工作，

应力与应变成正比。由于ε是一个无量纲的量，所以E的单位与σ相同，其常用单位是GPa(吉帕)。

例 2.4 一等截面钢杆，受力及几何尺寸如图2.11所示。已知材料的弹性模量$E=210\text{GPa}$，试绘制钢杆的轴力图，并求：(1)每段杆的伸长量；(2)每段杆的线应变；(3)全杆的总伸长量。

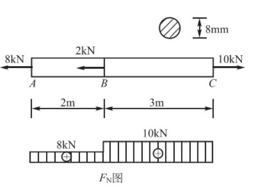


图 2.11 杆的变形

解： 绘制轴力图。杆的轴力图如图2.11所示。

(1) 计算每段杆的伸长量。应用胡克定律求出各段杆的变形

$$\Delta l_{AB}=\frac{F_{N,AB}l_{AB}}{EA}=\frac{8\times10^3\times2}{210\times10^9\times\frac{\pi\times8^2\times10^{-6}}{4}}=1.52\times10^{-3}(\text{m})$$

$$\Delta l_{BC}=\frac{F_{N,BC}l_{BC}}{EA}=\frac{10\times10^3\times3}{210\times10^9\times\frac{\pi\times8^2\times10^{-6}}{4}}=2.84\times10^{-3}(\text{m})$$

(2) 计算每段杆的线应变。应用胡克定律求出各段杆的线应变

$$\varepsilon_{AB}=\frac{\Delta l_{AB}}{l_{AB}}=\frac{1.52\times10^{-3}}{2}=7.6\times10^{-4},\quad \varepsilon_{BC}=\frac{\Delta l_{BC}}{l_{BC}}=\frac{2.84\times10^{-3}}{3}=9.47\times10^{-4}$$

(3) 全杆的总伸长量。杆的总变形等于各段变形之和

$$\Delta l=\Delta l_{AB}+\Delta l_{BC}=1.52\times10^{-3}+2.84\times10^{-3}=4.36\times10^{-3}(\text{m})=4.36(\text{mm})$$

2.4 轴向拉伸、压缩时材料的力学性能

材料的力学性能也称为机械性质，是指材料在受力过程中在强度和变形方面所表现出的性能，如弹性、塑性、强度、韧性、硬度等。为了进行杆件的强度计算，必须研究材料的力学性能。材料的力学性能都是通过试验测出的。同样的材料在不同的温度和加载方式下也会显示出不同的力学性能。低碳钢和铸铁在一般工程中应用比较广泛，它们在拉伸或压缩时的力学性能也比较典型，故本节主要介绍这两种材料在常温(指室温)、静载(指加载速度缓慢平稳)情况下的力学性能。

2.4.1 轴向拉伸时材料的力学性能

拉伸试验的试件要按国家标准规定的形状和尺寸，做成标准试件，以便比较不同材料的试验结果。对于金属材料，通常采用如图2.12所示的圆柱形标准试件。试件中部等截面段的直径为d，试件中段用来测量变形的长度l称标距(original gage length)。标距l与直径d之比，一般规定有$l=10d$和$l=5d$两种。试验所用的主要设备有万能材料试验机或电子万能材料试验机和测量变形的引伸计。试验

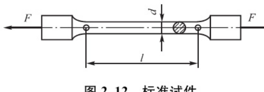


图 2.12 标准试件

时，将试件的两端装卡在试验机上，然后在其上施加缓慢增加的拉力，直到把试件拉断为止。

工程中常见的材料品种很多，下面以低碳钢和铸铁为主要代表，介绍拉伸时材料的力学性能。

1. 低碳钢的拉伸试验

在拉伸的过程中，自动绘图仪或计算机能自动绘出荷载 F 与相应的伸长变形 Δl 之间的关系曲线，称为拉伸图，如图 2.13(a)所示。

试件的拉伸图与试件的几何尺寸有关。为了消除试件几何尺寸的影响，将拉伸图的纵坐标除以试件的原始横截面面积 A，横坐标除以标距 l，则得应力 σ 与应变 ε 的关系曲线，如图 2.13(b)所示。从 $\sigma-\varepsilon$ 图和试验中观察到的现象可以知道，低碳钢拉伸试验分为四个阶段。

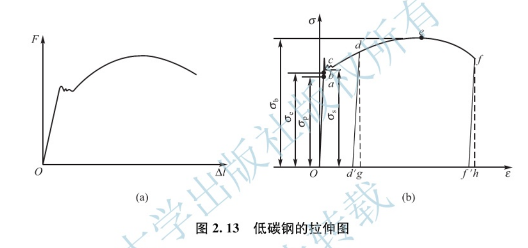


图 2.13　低碳钢的拉伸图

(1) 弹性阶段。从图 2.13(b)中可以看出，在拉伸的初始阶段，σ 与 ε 的关系为直线 Oa，表示在这一阶段内，应力与应变成正比，即

$$\sigma = E\varepsilon$$

这就是拉伸或压缩的胡克定律。式中 E 为与材料有关的比例常数，称为弹性模量。与 a 点对应的应力，即应力 σ 与应变 ε 成正比时应力的最高值，称为材料的比例极限(proportional limit)，以 σ_{P} 表示。低碳钢的比例极限大约为 200MPa。

超过比例极限后，从 a 到 b，σ 与 ε 之间的关系不再是直线，但解除拉力后变形仍完全消失，材料的变形是弹性的。与 b 点对应的应力称为弹性极限(elastic limit)，用 σ_{e} 表示。由于弹性极限与比例极限非常接近，所以在实际应用中通常将两者视为相等，即将 a 和 b 视为同一点。

(2) 屈服阶段。当应力超过弹性极限后，图 2.13(b)上出现接近水平的小锯齿形波动段 bc，说明此时应力基本保持不变，但应变却迅速增加，表明材料暂时失去了抵抗变形的能力。这种应力几乎不变，应变却不断增加，从而产生明显变形的现象，称为材料的屈服或流动。bc 段对应的过程称为屈服阶段，屈服阶段的最低应力值 σ_{s} 称为材料的屈服点或屈服极限(yielding limit)或屈服点。低碳钢的屈服极限 $\sigma_{\mathrm{s}}=220\sim240$MPa。在屈服阶段，如果试件表面光滑，可以看到试件表面有与轴线大约成 45°的条纹，称为滑移线。一般认为，这些条纹是材料内部的晶粒沿最大切应力方向相互错动引起的。在这一阶段，如果卸

载，将出现不能消失的塑性变形。这在工程中一般是不允许的。所以屈服极限是衡量材料强度的一个重要指标。

(3) 强化阶段。经过屈服阶段以后，从 c 点开始曲线又逐渐上升，材料又恢复了抵抗变形的能力，要使它继续变形，必须增加应力。这种现象称为材料的强化。从 c 点至 e 点称为强化阶段。曲线的最高点 e 所对应的应力称为强度极限(Strength limit)，以 σ_b 表示。低碳钢的强度极限大约为 400MPa。强度极限是衡量材料强度的另一个重要指标。

在强化阶段内任一点 d，若缓慢卸载，曲线 $\sigma-\varepsilon$ 将沿着与 Oa 近似平行的直线回到 d' 点，如图 2.13(b)所示。$d'g$ 是消失了的弹性变形，而 Od' 是残留下来的塑性变形。若卸载后立即重新加载，应力-应变曲线将沿着 $d'd$ 变化。比较曲线 $Oabcdef$ 和 $d'def$ 可见，重新加载时，材料的比例极限和屈服极限都将提高，但断裂后的塑性变形将减少。这种将材料预拉到强化阶段，使之出现塑性变形后卸载，再重新加载时，出现比例极限和屈服极限提高而塑性变形降低的现象，称为冷作硬化。工程上常利用冷作硬化提高材料在弹性阶段的承载能力，如冷拉钢筋、冷拔钢丝可以提高材料的强度；但它也有不利的一面，即降低了材料的塑性。

(4) 局部变形阶段。当应力达到强度极限前试件标距段内的变形是均匀的；当应力超过强度极限后，变形集中在试件的某一局部，该处横截面面积显著减小，出现颈缩(necking)现象，如图 2.14(a)所示。由于局部横截面面积显著减小，试件迅速被拉断。

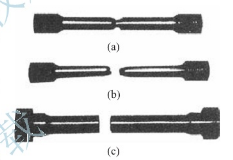


图 2.14 颈缩与断裂后的试件

(5) 伸长率和截面收缩率。试件拉断后，弹性变形消失了，只剩下塑性变形。工程中常用伸长率(percent elongation)表示材料的塑性，即

$$\delta=\frac{l_1-l}{l}\times100\% \tag{2-12}$$

式中，l_1 是试件拉断后的标距，l 是原标距。通常把 $\delta\geqslant5\%$ 的材料称为塑性材料(ductile materials)，把 $\delta<5\%$ 的材料称为脆性材料(brittle materials)。低碳钢的伸长率很高，其平均值为 20%～30%，说明低碳钢的塑性很好。它是典型的塑性材料。铸铁、混凝土、石料等没有明显的塑性变形，都是脆性材料。

另外还可以用截面收缩率(percent reduction in area)ψ 来表示材料的塑性，即

$$\psi=\frac{A-A_1}{A}\times100\% \tag{2-13}$$

式中，A_1 为试件断口处的最小横截面面积，A 为试件的原始横截面面积。显然，材料的塑性越大，其 δ、ψ 值也就越大，因此，伸长率和截面收缩率是衡量材料塑性性质的两个重要指标。

2. 其他塑性材料的拉伸试验

其他金属材料的拉伸试验和低碳钢拉伸试验的方法相同，图 2.15 给出了锰钢、退火球墨铸铁、低碳钢、青铜等材料的应力-应变曲线。由图中可见，当应力较小时，这四种材料的应力与应变也成直线关系，符合胡克定律，其次，它们的伸长率虽各不相同，但都

大于 10%，故都是塑性材料。不过与低碳钢相比，其他三种塑性材料并没有明显的屈服阶段，因此得不到明确的屈服极限。

对于没有明显屈服阶段的塑性材料，工程上规定，取试件产生 0.2%的塑性应变时的应力值为材料的名义屈服极限，以 $\sigma_{0.2}$ 表示，如图 2.16 所示。

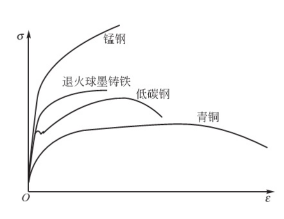


图 2.15　几种材料的 σ-ε 曲线图

图 2.16　名义屈服应力

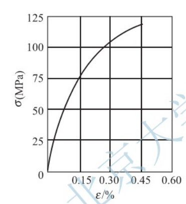


图 2.17　铸铁拉伸时的 σ-ε 曲线图

3. 铸铁的拉伸试验

铸铁可作为脆性材料的代表，其拉伸时的 σ-ε 曲线如图 2.17 所示。从图中可以看出，铸铁拉伸时图中没有明显的直线阶段，也没有屈服阶段。断裂是突然发生的，断口与轴线垂直，塑性变形很小。衡量铸铁强度的唯一指标是抗拉强度 σ_b。由于铸铁的 σ-ε 图中没有明显的直线部分，所以它不符合胡克定律。但由于铸铁构件总是在较小的应力范围内工作，故这时可近似认为，胡克定律在较小应力的范围内可以近似地使用。

2.4.2　轴向压缩时材料的力学性能

金属材料的压缩试件一般做成圆柱形，且试件的高度为直径的 1.5～3.0 倍。在图 2.18 中画出了低碳钢压缩时的 σ-ε 曲线，图中虚线为低碳钢拉伸时的 σ-ε 曲线。可以看出，低碳钢材料压缩时的比例极限、弹性模量及屈服点都和拉伸时相同，只是超过屈服点后，试件被愈压愈扁，不可能压断，故得不到强度极限。

图 2.19 是铸铁压缩时的 σ-ε 曲线，整个图形与拉伸时相似。但压缩时的伸长率比拉伸时大，压缩时的强度极限是拉伸时的 4～5 倍，压缩破坏面与试件轴线大致成 45°角。

从以上试验结果可知，低碳钢等塑性材料的抗拉和抗压能力都较强，塑性较好，适用于制造受拉构件和在工作中可能承受冲击、振动荷载的构件，如拉杆、齿轮、轴等。铸铁等脆性材料抗压性能好，但塑性差，适用于做受压构件，如机器的基座、外壳、建筑物的基础等。

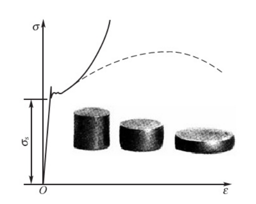


图 2.18 低碳钢压缩时的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线图

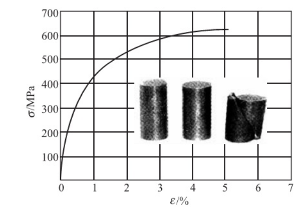


图 2.19 铸铁压缩时的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线图

由材料的力学性能和工程实践可知，对于塑性材料的构件，当工作应力达到屈服极限时，会因产生较大的塑性变形而不能正常工作；对于脆性材料的构件来说，当工作应力达到强度极限时，会发生断裂破坏。材料因过大的塑性变形或断裂而丧失工作能力时的应力，称为极限应力(limit stress)，用 σ^0 表示。塑性材料的极限应力是屈服极限 σ_s（或名义屈服极限 $\sigma_{0.2}$）；脆性材料的极限应力是强度极限 σ_b。

设计构件时，考虑到荷载估计的准确程度、应力计算方法的精确程度、材料的均匀程度以及构件的重要性等因素，为了保证构件安全可靠地工作，应使它的工作应力小于材料的极限应力，并使构件留有适当的强度储备。为此将材料的极限应力除以一个大于 1 的系数 n，作为构件允许达到的最大应力值，称为许用应力(allowable stress)，以符号 $[\sigma]$ 表示。即

$$[\sigma]=\frac{\sigma^0}{n} \tag{2-14}$$

式中，n 称为安全系数(factor of safety)，它表示材料的安全储备程度或强度的富余程度。

正确地选取安全系数，关系到构件的安全与经济这一对矛盾的正确处理。过大的安全系数会浪费材料，太小的安全系数则又可能使构件不能安全工作。各种不同工作条件下构件安全系数 n 的选取，可参照有关工程手册来确定。一般对于塑性材料，取 $n=1.3\sim2.0$；对于脆性材料，取 $n=2.0\sim3.5$。

2.5 轴向拉伸、压缩时的强度计算

杆件是由各种材料制成的。材料所能承受的应力是有限度的，若超过某一极限值，杆件便会发生破坏或产生过大的塑性变形，因强度不够而丧失正常的工作能力。因此，工程中对各种材料，规定了保证杆件具有足够的强度所允许承担的最大应力值，称为材料的许用应力，用符号 $[\sigma]$ 表示。显然，只有当杆件中的最大应力小于或等于材料的许用应力时，杆件才具有足够的强度。即

$$\sigma_{\max}=\frac{F_N}{A}\leqslant[\sigma] \tag{2-15}$$

式(2-15)称为杆件在轴向拉伸(或压缩)时的强度条件。其中 F_N 为危险截面上的轴力；A 为危险截面的面积。所谓危险截面，指的是产生最大工作应力的截面。在进行强度计算时，要准确找出危险截面，若危险截面满足了强度条件，则整个杆件就具备了足够的强度。

根据强度条件可解决以下三类问题。

1. 校核强度(Check the Intensity)

已知杆件的材料、截面尺寸和所受的荷载，校核杆件是否满足强度条件式(2－15)，从而判断杆件能否安全地工作。

2. 设计截面(Determine the Allowable Dimension)

根据杆件所受的荷载和材料的许用应力，按下式

$$A \geqslant \frac{F_N}{[\sigma]}$$

确定杆件的横截面面积，然后再根据工程上的其他要求确定横截面的几何形状尺寸。

3. 求许可荷载(Determine the Allowable Load)

已知杆件的横截面面积和材料的许用应力，可按下式

$$F_{Nmax} \leqslant A[\sigma]$$

计算杆件允许的最大轴力，再由轴力与外力的关系确定它能承受的许可荷载。

在强度计算中，可能出现最大应力稍大于许用应力的情况，设计规范规定，超过值只要在5%以内都是允许的。

在以上计算中，都要用到材料的许用应力。工程上常见材料在一般情况下的许用应力约值在表2－2中给出。

表2－2　常用工程材料的许用应力约值

材料名称	牌号	许用应力(MPa)	
		轴向拉伸	轴向压缩
低碳钢	Q235	170	170
低合金钢	16Mn	230	230
灰口铸铁		34～54	160～200
混凝土	C20	0.44	7
	C30	0.6	10.3
木材(顺纹)		6.4	10

例2.5　如图2.20(a)所示气动夹具，已知气缸内径 $D=140\text{mm}$，缸内气压力 $p=0.6\text{MPa}$，活塞杆材料的许用应力 $[\sigma]=80\text{MPa}$，活塞杆直径 $d=14\text{mm}$。试校核活塞杆的强度。

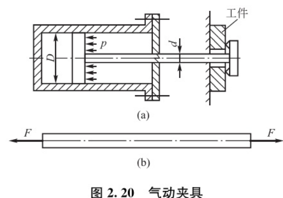


图2.20　气动夹具

解：(1) 受力分析。活塞杆左端承受活塞上气体的压力，右端承受工件阻力，两端外力合力的作用线与杆的轴线重合，所以活塞杆为轴向拉伸杆件，如图2.20(b)所示。拉力

F 可由气体压强及活塞面积求得

$$F=p\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)=0.6\times10^6\times\frac{\pi}{4}\times(140^2-14^2)\times10^{-6}=9\ 139.28(\text{N})$$

(2) 校核强度。活塞杆的轴力为 $F_N=F=9\ 139.28\text{N}$，活塞杆的正应力为

$$\sigma=\frac{F_N}{A}=\frac{4F_N}{\pi d^2}=\frac{4\times9\ 139.28}{\pi\times14^2\times10^{-6}}=59.4(\text{MPa})<[\sigma]$$

所以强度足够。

例 2.6　图 2.21(a)所示为某冷锻机的曲柄滑块机构。锻压机工作时，当连杆接近水平位置时锻压力最大为 $F=3\ 780\text{kN}$。连杆的横截面为矩形，高宽之比 $h/b=1.4$，材料的许用应力 $[\sigma]=90\text{MPa}$。试设计连杆横截面的尺寸 h 和 b。



图 2.21　某冷锻机的曲柄滑块机构

解：(1) 计算轴力。锻压机连杆位于水平位置时，其轴力最大，为

$$F_N=F=3\ 780(\text{kN})$$

(2) 选择截面尺寸。由强度条件得

$$A\geqslant\frac{F_N}{[\sigma]}=\frac{3\ 780\times10^3}{90\times10^6}=42\times10^{-3}(\text{m}^2)=42\times10^3(\text{mm})^2$$

连杆为矩形截面，$A=bh$，且 $h=1.4b$，代入上式得

$$1.4b^2\geqslant42\times10^3(\text{mm})^2$$

$$b\geqslant173(\text{mm})$$

$$h\geqslant1.4\times173=242.2(\text{mm})$$

例 2.7　简易旋臂式吊车如图 2.22(a)所示。斜杆由两根 5 号等边角钢组成，每根角钢的横截面面积 $A_1=4.80\times10^2\text{mm}^2$，$\alpha=30°$；水平横杆由两根 10 号槽钢组成，每根槽钢的横截面面积 $A_2=1.274\times10^2\text{mm}^2$。材料都是 Q235 钢，许用应力 $[\sigma]=120\text{MPa}$，电动葫芦能沿水平横杆移动。试求当电动葫芦处在图 2.22(a)所示位置时，吊车的最大起重量 W(两杆的自重不计)。

解：(1) 受力分析。取 B 点为分离体，在不计杆件自重及连接处的摩擦时，B 点受力如图 2.22(b)所示。根据平衡方程

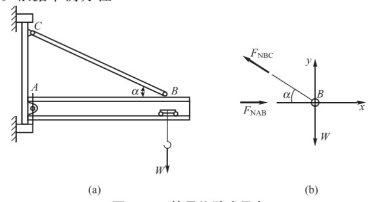


图 2.22　简易旋臂式吊车

$$\sum F_x=0,\ F_{NAB}-F_{NBC}\cos\alpha=0$$
$$\sum F_y=0,\ F_{NBC}\sin\alpha-W=0$$

得

$$F_{NBC}=\frac{W}{\sin\alpha}=\frac{W}{\sin30°}=2W$$
$$F_{NAB}=F_{NBC}\cos\alpha=2W\cos30°=1.73W$$

（2）确定最大起重量。各杆的许可轴力为

$$F_{NBC}\leqslant2[\sigma]A_1=2\times120\times10^6\times4.80\times10^2\times10^{-6}=115.2(\text{kN})$$
$$F_{NAB}\leqslant2[\sigma]A_2=2\times120\times10^6\times12.74\times10^2\times10^{-6}=305.8(\text{kN})$$

按角钢的强度条件计算最大起重量：将 $F_{NBC}=2W$ 代入 $F_{NBC}\leqslant115.2\text{kN}$ 得

$$W\leqslant57.6\text{kN}$$

按槽钢的强度条件计算最大起重量：将 $F_{NAB}=1.73W$ 代入 $F_{NAB}\leqslant305.8\text{kN}$ 得

$$W\leqslant176.8\text{kN}$$

为保证两杆强度均足够，应取 $W=57.6\text{kN}$。

2.6 轴向拉伸、压缩时的应变能

固体受外力作用而变形。在变形过程中，外力所做的功将转变为储存于固体内的能量。当外力逐渐减小时，变形逐渐恢复，固体又将释放出储存于固体内的能量而做功。固体在外力作用下，因变形而储存的能量称为应变能(strain energy)。

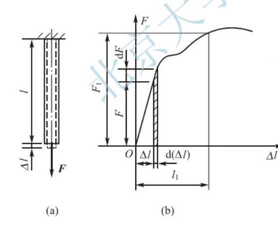


图 2.23　拉伸或压缩时的应变能

现在讨论轴向拉伸或压缩时的应变能。设受拉杆件上端固定［图 2.23(a)］，作用于下端的拉力由零开始缓慢增加。拉力为 F 时，杆件的伸长为 Δl，如再增加一个 $\mathrm{d}F$，杆件相应的变形增量为 $\mathrm{d}(\Delta l)$，于是已知作用于杆件上的力 F 因位移 $\mathrm{d}(\Delta l)$，而做功，且所做的功为

$$\mathrm{d}W=F\mathrm{d}(\Delta l)$$

容易看出，$\mathrm{d}W$ 等于图 2.23(b)中阴影部分的微面积。拉力所做的总功 W 应为一系列微面积的总和，它等于 $F-\Delta l$ 曲线下面的面积，即

$$W=\int_0^{\Delta l_1}F\mathrm{d}(\Delta l) \tag{2-16}$$

在应力小于比例极限的范围内，F 与 Δl 的关系是一条直线，斜直线下面的面积是一个三角形，故有

$$W=\frac{1}{2}F\Delta l \tag{2-17}$$

根据功能原理，拉力所做的功应等于杆件储存的能量，对缓慢增加的静荷载，杆件的动能并无明显变化。金属杆件受拉虽也会引起热能的变化，但数量甚微，可省略不计。这样，就可认为杆件内只储存应变能 V_ε，其数量就等于拉力所做的功。线弹性范围内，外力

做的功等于杆件应变能，即

$$V_\varepsilon = W = \frac{1}{2}F\Delta l$$

由胡克定律，$\Delta l = \dfrac{Fl}{EA}$，上式又可写成

$$V_\varepsilon = W = \frac{1}{2}F\Delta l = \frac{F^2 l}{2EA} \tag{2-18}$$

应变能的单位为J(焦耳)。

由于在拉杆的各横截面上所有点处的应力相同，故杆的单位体积内所储存的应变能，可由杆的应变能 V_ε 除以杆的体积 V 来计算。这种单位体积内的应变能，称为应变能密度，用 v_ε 表示，于是

$$v_\varepsilon = \frac{V_\varepsilon}{V} = \frac{\frac{1}{2}F\Delta l}{Al} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \tag{2-19a}$$

利用胡克定律，$\sigma = E\varepsilon$，上式又可写成

$$v_\varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} \tag{2-19b}$$

或

$$v_\varepsilon = \frac{E\varepsilon^2}{2} \tag{2-19c}$$

应变能密度单位为J/m^3(焦耳/米^3)。

例2.8 简易起重机如图2.24所示。BD 杆为无缝钢管，外径为90mm，壁厚为2.5mm，杆长 $l=3$m，弹性模量 $E=210$GPa，BC 是一条横截面面积为172mm^2 的钢索，弹性模量 $E_1=177$GPa。若不考虑立柱的变形，试求 B 点的垂直位移(设 $P=30$kN)。

解： 从三角形 BCD 中解出 BC 和 CD 的长度分别为

$$BC = l_1 = 2.20\text{m}, \quad CD = 1.55\text{m}$$

算出 BC 和 BD 两杆的横截面面积分别为

$$A_1 = 2\times 172\text{mm}^2 = 344(\text{mm})^2, \quad A = \frac{\pi}{4}\times(90^2 - 85^2)\text{mm}^2 = 687(\text{mm})^2$$

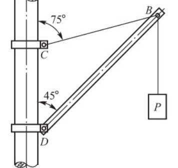


图2.24 简易起重机

由 BD 杆的平衡方程，求得钢索 BC 的拉力为

$$F_{N1} = 1.41P$$

BD 杆的压力为

$$F_{N2} = 1.93P$$

把简易起重机看作是由 BC 和 BD 两杆组成的简单弹性杆系，当荷载 P 从零开始缓慢地作用于杆系上时，P 与 B 点的垂直位移 δ 的关系也与图2.23(b)一样，是一条斜直线。P 所完成的功也是这条斜直线下的面积。即

$$W = \frac{1}{2}P\delta$$

P 所完成的功在数值上应等于杆系的应变能，即等于 BC 和 BD 两杆应变能的总和。故

$$\frac{1}{2}P\delta = \frac{F_{N1}^2 l_1}{2E_1A_1} + \frac{F_{N2}^2 l}{2EA} = \frac{(1.41P)^2 l_1}{2E_1A_1} + \frac{(1.93P)^2 l}{2EA}$$

由此求得

$$\delta=4.48\times10^{-3}\text{m}=4.48\text{mm}$$

2.7 轴向拉伸、压缩时的超静定问题

1. 超静定问题及其解法

前面所讨论的问题，其支座反力和内力均可由静力平衡条件完全确定，这类问题称为静定问题，如图 2.25(a)所示。在某些情况下，作用于研究对象上的未知力个数，多于静力平衡方程的数目，这时就不能单凭静力平衡方程来求出未知力，这种问题称为超静定问题或静不定问题，如图 2.25(b)所示。未知力多于静力平衡方程的数目，称为超静定的次数(degrees of statically indeterminate problem)。如图 2.25(b)所示的杆系，节点的静力平衡方程为两个，而未知力为三个，所以是一次超静定问题。

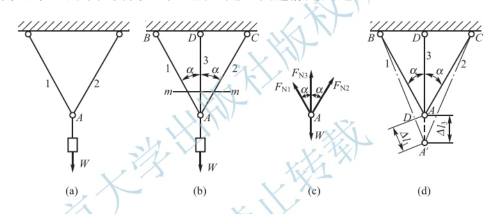


图 2.25 超静定桁架

解超静定问题，除列出静力平衡方程外，还需要找出足够数目的补充方程。这些补充方程可由结构变形的几何关系以及力和变形间的物理关系来建立。由补充方程和静力平衡方程即可求得全部的未知力。

下面通过例子来说明超静定问题的解法。

例 2.9 试求图 2.25(b)所示杆系中各杆的轴力。已知杆 1 和杆 2 的长度、材料及横截面面积均相同，即 $l_l=l_2$，$A_l=A_2$，$E_1=E_2$；杆 3 的长设为 l_3，抗拉刚度为 E_3A_3，1、2 两杆与 3 杆的夹角均为 α，悬挂重量为 W。

解：(1) 列平衡方程。取节点 A 为研究对象，设三根杆的轴力分别为 F_{N1}、F_{N2}、F_{N3} [图 2.25(c)]，由平衡方程$\sum F_x=0$，$\sum F_y=0$ 可得

$$F_{N1}\sin\alpha-F_{N2}\sin\alpha=0 \tag{a}$$

$$F_{N3}+F_{N1}\cos\alpha+F_{N2}\cos\alpha-W=0 \tag{b}$$

(2) 变形几何关系。由图 2.25(d)可知，由于结构左右对称，杆 1 和杆 2 的抗拉刚度相同，所以节点 A 只能垂直下移。设变形后各杆汇交于 A'点，则 $AA'=\Delta l_3$；由 A 点作 $A'B$ 的垂线 AD，则有 $DA'=\Delta l_1$。在小变形条件下，$\angle BA'A\approx\alpha$，于是变形几何关系为

$$\Delta l_1=\Delta l_2=\Delta l_3\cos\alpha$$

(3) 物理关系。由胡克定律应有

$$\Delta l_1=\frac{F_{N1}l_1}{E_1A_1},\quad \Delta l_3=\frac{F_{N3}l_3}{E_3A_3}$$

（4）补充方程。将物理关系式代入几何方程中，得到补充方程

$$\frac{F_{N1}l_1}{E_1A_1}=\frac{F_{N3}l_3}{E_3A_3}\cos\alpha=\frac{F_{N3}l_1}{E_3A_3}\cos^2\alpha$$

即

$$F_{N1}=\frac{F_{N3}E_1A_1}{E_3A_3}\cos^2\alpha \tag{c}$$

（5）求解各杆轴力。联立求解(a)、(b)、(c)，可得

$$F_{N1}=F_{N2}=\frac{W\cos^2\alpha}{\dfrac{E_3A_3}{E_1A_1}+2\cos^2\alpha},\quad F_{N3}=\frac{W}{1+2\dfrac{E_1A_1}{E_3A_3}\cos^3\alpha}$$

由上述答案可见，杆的轴力与各杆间的刚度比有关。一般说来，增大某杆的抗拉(压)刚度 EA，则该杆的轴力亦相应增大。这是超静定问题的一个重要特点，而静定结构的内力与其刚度无关。

2. 装配应力(Initial Stresses)

所有构件在制造中都会有一些误差，这种误差，在静定结构中不会引起任何内力，而在超静定结构中则不然。如图 2.26 所示的三杆桁架结构，若杆 3 制造时短了 δ，为了能将三根杆装配在一起，必须将杆 3 拉长，杆 1 和杆 2 压短，这种强行装配会在杆 3 中产生拉应力，而在杆 1 和杆 2 中产生压应力。如误差 δ 较大，这种应力会达到很大的数值。这种由于装配而引起杆内产生的应力，称为装配应力。装配应力是在荷载作用前结构中已经具有的应力，因而是一种初应力。

在工程结构中，装配应力的存在有时是不利的，应予以避免；但有时我们也有意识地利用它，比如机械制造中的紧密配合和土木结构中的预应力钢筋混凝土等。

例 2.10 吊桥链条的一节由三根长为 l 的钢杆组成，如图 2.27 所示。若三杆的横截面面积、材料均相同，$E=200\text{GPa}$，中间钢杆略短于名义长度，且加工误差为 $\delta=\dfrac{l}{2\,000}$，试求各杆的装配应力。

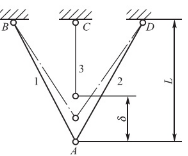


图 2.26 制造误差引起装配应力

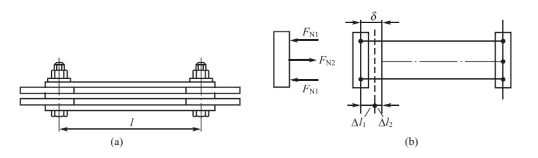


图 2.27 吊桥链条受力图

解：如不计两端连螺栓的变形，可将链条的一节简化成如图 2.27(b)所示的超静定结构。当把较短的中间杆与两侧杆一同固定于两端的钢体时，中间杆将受到拉伸，而两侧杆将受到压缩。最后在虚线位置上，三杆的变形相互协调。设两侧杆的轴向压力为 F_{N1}，中间杆的轴向拉力为 F_{N2}。平衡方程应为

$$F_{N2}-2F_{N1}=0 \tag{a}$$

若两侧杆的缩短为 Δl_1，中间杆的伸长为 Δl_2，则 Δl_1 与 Δl_2 的绝对值之和应等于 δ，即

$$\Delta l_1+\Delta l_2=\delta=\frac{l}{2\ 000} \tag{b}$$

由胡克定律，得

$$\Delta l_1=\frac{F_{N1}l_1}{EA},\quad \Delta l_2=\frac{F_{N2}l_2}{EA}$$

代入(b)式，得

$$F_{N1}+F_{N2}=\frac{EA}{2\ 000} \tag{c}$$

由(a)、(c)两式解得

$$F_{N1}=\frac{EA}{6\ 000},\quad F_{N2}=\frac{EA}{3\ 000}$$

于是两侧杆和中间杆的装配应力分别为

$$\sigma_1=\frac{F_{N1}}{A}=\frac{E}{6\ 000}=33.3(\text{MPa})$$

$$\sigma_2=\frac{F_{N2}}{A}=\frac{E}{3\ 000}=66.7(\text{MPa})$$

3. 温度应力(Temperature Stresses)

在工程实际中，杆件遇到温度的变化，其尺寸将有微小的变化。当温度升高(降低)ΔT 时，杆件伸长(缩短)Δl 为

$$\Delta l=\alpha l\Delta T \tag{2-20}$$

在静定结构中，由于杆件能自由变形，整个结构均匀的温度变化不会在杆内产生应力。但在超静定结构中，由于杆件受到相互制约而不能自由变形，温度变化将使其内部产生应力。这种因温度变化而引起的杆内应力，称为温度应力。温度应力也是一种初应力，对于两端固定的杆件，当温度升高(降低)ΔT 时，杆内引起的温度应力为

$$\sigma=E\alpha\Delta T \tag{2-21}$$

式中，E 为材料的弹性模量，α 为材料的线膨胀系数。

比如，某材料的弹性模量 $E=200\text{GPa}$，线膨胀系数 $\alpha=12.5\times10^{-6}\,1/℃$，当温度升高 $\Delta T=70℃$ 时，杆内的温度应力为

$$\sigma=E\alpha\Delta T=200\times10^{9}\times12.5\times10^{-6}\times70=175(\text{MPa})$$

可见温度应力的影响是不容忽视的。在工程上常采取一些措施来降低或消除温度应力。例如，在蒸汽管道中设置伸缩节，在铁道两段钢轨间预先留有适当空隙，在钢桥桁架一端采用活动铰链支座等，都是为了避免产生过大的温度应力而采取的措施。

2.8 应力集中的概念

等截面直杆受轴向拉伸或压缩时，距杆端稍远处横截面上的正应力是均匀分布的。但由于工程实际需要，有些杆件必须切槽、开孔或制成阶梯状等，以致在这些部位上截面尺寸发生突然变化。实验和理论分析都表明，在这些突变处横截面上的应力并不是均匀分布的。如图 2.28 所示开有圆孔的板条，在轴向拉伸时，孔边的应力比离孔稍远处的应力大得多。这种由于截面尺寸的突变而产生的应力局部骤增的现象，称为应力集中(stress concentrations)。工程上以应力集中系数（stress-concentration factor）K 来描述应力集中的程度，它是应力集中处的最大应力和同一截面上的平均应力之比，即

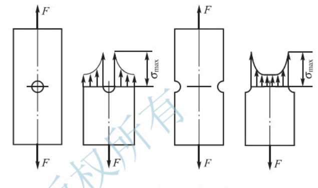


图 2.28 应力集中现象

$$K=\frac{\sigma_{max}}{\sigma} \tag{2-22}$$

K 是一个大于 1 的系数。大量分析表明，构件的截面尺寸改变得越急剧，切口尖角越小，应力集中的程度就越严重。

各种材料对应力集中的敏感程度并不相同。低碳钢等塑性材料因有屈服阶段存在，当局部的最大应力 σ_{max} 到达屈服极限时，该处材料首先屈服，σ_{max} 暂时不再增加。当外力继续增加时，处在弹性阶段的其他部分的应力继续增长，直至整个截面上的应力都达到屈服极限时才达到了杆的极限状态，即材料的塑性具有缓和应力集中的作用。因此在静荷载作用下，应力集中对塑性材料构件承载能力的影响不大；但对脆性材料，因它没有屈服阶段，当应力集中处的最大应力 σ_{max} 达到 σ_b 时，杆件就会在该处首先开裂，所以应力集中使脆性材料构件的承载能力大为降低。但铸铁等类组织不均匀的脆性材料，因其内部本身就存在严重的应力集中，故由截面尺寸急剧改变而引起的应力集中对强度的影响并不敏感。

对于在冲击荷载或周期性变化的交变应力作用下的构件，应力集中对各种材料的强度都有较大的影响。

2.9 连接件的实用强度计算

工程上常用螺栓、铆钉、键、销钉等连接构件，将构件连接起来，以实现力和运动的传递。当结构工作时，连接件将发生剪切变形，如图 2.29 所示。若外力过大，连接件会沿剪切面被剪断，使连接破坏。

在连接件发生剪切变形的同时，连接件和被连接件的接触面将相互压紧，这种现象称为挤压现象，其接触面叫挤压面。当挤压力过大时，连接件或被连接件在接触的局部范围内将产生塑性变形，甚至被压溃，造成连接松动，如图 2.30 所示。

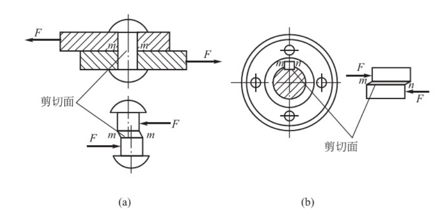


图 2.29　受剪构件

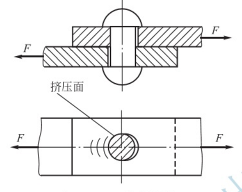


图 2.30　挤压现象

为了保证连接件不发生剪切破坏，结构不发生挤压破坏，必须对其进行剪切和挤压强度计算。

1. 剪切实用强度计算

现以图 2.31(a)所示的螺栓连接为例进行分析。螺栓的受力如图 2.31(b)所示。为分析螺栓在剪切面上的强度，沿剪切面 $m-m$ 截开并取任一部分为研究对象，如图 2.31(c)所示。由平衡条件可知，两个截面上必有与截面相切的内力 F_S，且 $F_S=F$，F_S 称为剪力(shearing force)。相应地，截面上必有切应力(shearing stress)。

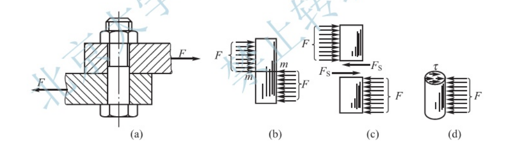


图 2.31　螺栓连接受力情况

切应力在剪切面上的分布情况比较复杂，如图 2.31(d)所示，为了计算简便，工程中通常采用以试验、经验为基础的实用计算，即近似地认为切应力在剪切面上均匀分布，于是有

$$\tau=\frac{F_S}{A} \tag{2-23}$$

式中，τ 为切应力；F_S 为剪切面上的剪力；A 为剪切面面积(area in shear)。

要保证连接件不发生剪切破坏，切应力 τ 不应超过材料的许用切应力(allowable shearing stress of a material) $[\tau]$，所以剪切强度条件为

$$\tau=\frac{F_S}{A}\leqslant[\tau] \tag{2-24}$$

$[\tau]$ 由材料的剪切极限应力(ultimate shearing stress)τ_u 除以安全系数(factor of safety)n 得出。根据剪切强度条件便可进行强度计算。

例 2.11 图 2.32(a)为拖拉机挂钩，已知牵引力 $F=15\text{kN}$，挂钩的厚度为 $\delta=8\text{mm}$，被连接的板件厚度为 $1.5\delta=12\text{mm}$，插销的材料为 20 号钢，材料的许用切应力为 $[\tau]=30\text{MPa}$，直径 $d=20\text{mm}$。试校核插销的剪切强度。

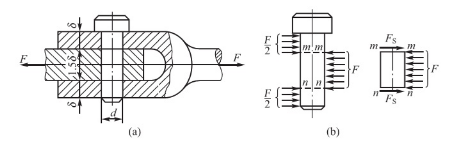


图 2.32 拖拉机挂钩

解： 插销受力如图 2.32(b)所示。根据受力情况，插销中段相对于上、下两段，沿 $m-m$、$n-n$ 两个面向右错动。所以有两个剪切面，成为双剪切。由平衡方程可求得剪力

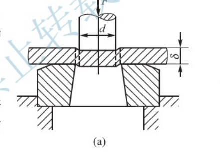
$$F_S=\frac{F}{2}$$

插销横截面上的切应力为

$$\tau=\frac{F_S}{A}=\frac{15\times10^3/2}{\frac{\pi}{4}\times20^2\times10^{-6}}=23.9\times10^6(\text{Pa})=23.9(\text{MPa})<[\tau]$$

故插销的剪切强度足够。

例 2.12 已知钢板的厚度为 $\delta=10\text{mm}$，其剪切极限为 $\tau_u=300\text{MPa}$。用冲床将钢板冲出直径为 $d=25\text{mm}$ 的孔，如图 2.33 所示，问需要多大的冲剪力 F？



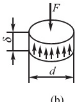


图 2.33 钢板冲孔

解： 剪切面是钢板内被冲头冲出的圆饼体的圆柱形侧面，如图 2.33(b)所示。其面积为

$$A=\pi d\delta=\pi\times25\times10\times10^{-6}=785\times10^{-6}(\text{m}^2)$$

冲孔所需的冲剪力应为

$$F\geqslant A\tau_u=785\times10^{-6}\times300\times10^6=236\times10^3(\text{N})=236(\text{kN})$$

2. 挤压实用强度计算

挤压面上的压力称为挤压力(bearing force)，用 F_{bs}表示。挤压面上的压强称为挤压应力(bearing stress)，用 σ_{bs}表示。挤压应力在挤压面上的分布较复杂，在实用计算中假定挤压面上的挤压应力均匀分布，其强度条件为

$$\sigma_{bs}=\frac{F_{bs}}{A_{bs}}\leqslant[\sigma_{bs}] \tag{2-25}$$

式中，A_{bs}为挤压面面积(area in bearing)，其计算视接触面的情况而定。当连接件与被连接件的接触面为平面时，如图 2.34(a)所示的连接件为键，挤压面即为接触面，$A_{bs}=hl/2$。当连接件与被连接件的接触面为圆柱面时，如图 2.34(b)所示螺栓、铆钉、销钉等，挤压应力的分布大致如图 2.34(c)所示，中点的挤压应力值最大。若以圆柱面的正投影面

积 $A_{bs}=hd$［图 2.34(d)］去除挤压力，则所得应力与圆柱接触面上的实际最大应力值大致相等，故挤压面面积按 $A_{bs}=hd$ 计算，称为名义挤压面积。$[\sigma_{bs}]$ 为材料的许用挤压应力(allowable bearing stress)，其数值由试验结果计算确定。

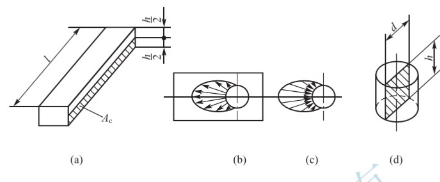


图 2.34 挤压面及其分布

必须注意，如果连接件和被连接件的材料不同，应对材料的许用应力较低者进行挤压强度计算。下面以例题说明具体计算方法。

例 2.13 齿轮与轴用平键连接，如图 2.35(a)所示。已知轴的直径 $d=50\text{mm}$，键的尺寸为 $b\times h\times l=20\text{mm}\times12\text{mm}\times100\text{mm}$，传递的力矩 $M=1000\text{N}\cdot\text{m}$，键和轴的材料为 45 号钢，其 $[\tau]=60\text{MPa}$，$[\sigma_{bs}]_1=100\text{MPa}$；齿轮材料为铸铁，其 $[\sigma_{bs}]_2=53\text{MPa}$。试校核键连接的强度。

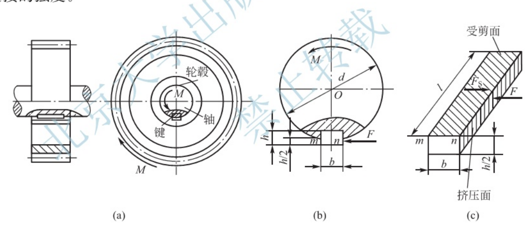


图 2.35 轮和轴的键连接受力情况

解 (1) 计算键所受的外力 F。取轴和键为研究对象，其受力如图 2.35(b)所示，根据对轴心的力矩平衡方程

$$\sum M_O(F)=0,\quad F\times\frac{d}{2}-M=0$$

可得

$$F=\frac{2M}{d}=\frac{2\times1\,000}{50\times10^{-3}}=40(\text{kN})$$

(2) 校核键的抗剪强度。键的剪切面积 $A=20\times100\text{mm}^2=2\,000\text{mm}^2$，剪力 $F_S=F=40\text{kN}$，所以

$$\tau=\frac{F_S}{A}=\frac{40\times10^3}{2\,000\times10^{-6}}=20(\text{MPa})<[\tau]$$

故剪切强度足够。

(3) 校核键的挤压强度。如图 2.35(c)所示，键所受的挤压力 $F_{bs}=F=40\text{kN}$，挤压面积 $A_{bs}=\dfrac{h}{2}\times l=\dfrac{12}{2}\times 100=600(\text{mm}^2)$，由于齿轮材料的许用挤压应力较低，因此只需对齿轮的轮毂进行挤压强度校核。

$$\sigma_{bs}=\frac{F_{bs}}{A_{bs}}=\frac{40\times 10^3}{600\times 10^{-6}}=66.7(\text{MPa})>[\sigma_{bs}]_2$$

故齿轮的挤压强度不够，而键和轴的挤压强度足够。

例 2.14 图 2.36(a)为一铆钉连接钢板。钢板和铆钉的材料相同，许用拉应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$，许用切应力 $[\tau]=140\text{MPa}$，许用挤压应力 $[\sigma_{bs}]=320\text{MPa}$。铆钉直径 $d=16\text{mm}$，钢板厚度 $\delta=10\text{mm}$，钢板宽度 $b=90\text{mm}$。当钢板承受拉力 $F=110\text{kN}$ 时，试校核连接的强度。

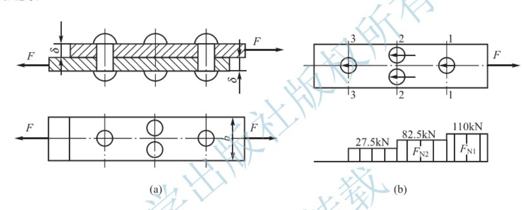


图 2.36 铆钉连接的受力情况

解： 实际的铆钉连接常常是由若干个铆钉组成的。当各铆钉直径相等，材料相同，且排列与荷载作用线成对称时，如图 2.36(a)所示，可以假设每个铆钉所受的力相等。本例中每个铆钉所受的力均为 $F/4$。

(1) 校核铆钉的剪切强度

$$\tau=\frac{F_S}{A}=\frac{F/4}{\pi d^2/4}=\frac{110\times 10^3}{\pi\times 16^2\times 10^{-6}}=136.8(\text{MPa})<[\tau]$$

故铆钉满足剪切强度要求。

(2) 校核铆钉的挤压强度

$$\sigma_{bs}=\frac{F_{bs}}{A_{bs}}=\frac{F/4}{d\delta}=\frac{110\times 10^3}{4\times 16\times 10\times 10^{-6}}=172(\text{MPa})<[\sigma_{bs}]$$

故铆钉满足挤压强度要求。

(3) 校核主板的拉伸强度。取上主板为研究对象，画出其受力图及相应的轴力图，如图 2.36(b)所示。由受力图及轴力图可知：1-1 截面上轴力最大，2-2 截面上轴力较大，而且截面削弱最严重，所以应对这两个截面进行拉伸强度校核。这时计算出的 σ_{1-1}、σ_{2-2} 均为名义拉伸正应力。

截面 1-1 处

$$\sigma_{1-1}=\frac{F_{N1}}{A_1}=\frac{F_{N1}}{(b-d)\delta}=\frac{110\times 10^3}{(90-16)\times 10\times 10^{-6}}=149(\text{MPa})<[\sigma]$$

截面 2-2 处

$$\sigma_{2-2}=\frac{F_{N2}}{A_2}=\frac{F_{N2}}{(b-2d)\delta}=\frac{82.5\times10^3}{(90-2\times16)\times10\times10^{-6}}=142(\text{MPa})<[\sigma]$$

故主板满足拉伸强度要求。

整个连接结构安全。

小　结

1. 轴力及轴力图

轴向拉伸(压缩)的杆件，由于外力或外力的合力作用线与杆件轴线重合，因而内力的合力作用线也必与杆件轴线重合，这样的内力称为轴力。当杆件受多个轴向外力作用时，杆件各部分横截面上的轴力不尽相同。为了表明轴力随横截面位置变化的情况，可绘制轴力图。轴力与横截面位置关系的图线，称为轴力图。

2. 拉伸、压缩时的应力

横截面上只有正应力，且为均匀分布的。横截面上正应力的计算公式为 $\sigma=\dfrac{F_N}{A}$。关于正应力的正负符号，一般规定：拉应力为正，压应力为负。

斜截面上的应力为

$$\begin{cases}\sigma_\alpha=\sigma\cos^2\alpha\\ \tau_\alpha=\sigma\cos\alpha\sin\alpha\end{cases}$$

3. 拉伸、压缩时的变形

(1) 纵向变形：$\Delta l=l_1-l$，$\varepsilon=\dfrac{\Delta l}{l}$

(2) 横向变形：$\Delta d=d_1-d$，$\varepsilon'=\dfrac{\Delta d}{d}$

(3) 泊松比：ε 和 ε' 分别为轴向受力杆的纵向线应变和横向线应变，则材料的泊松比是：$\mu=-\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon}=\left|\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|$。对同种材料，泊松比是一个常数。

(4) 胡克定律：当正应力不超过比例极限时，正应力与线应变成正比，即 $\sigma=E\varepsilon$，这就是轴向拉伸或压缩时的胡克定律。

轴向拉伸或压缩时轴向变形公式为 $\Delta l=\dfrac{F_N l}{EA}$，这是胡克定律的另一种表达形式。

4. 拉伸、压缩时材料的力学性能

材料的力学性能主要是指材料在外力作用下，在强度和变形方面表现出来的性质，它是通过实验进行研究的。低碳钢和铸铁是工程中广泛使用的两种材料。

5. 拉伸、压缩时的强度计算

使材料丧失正常工作能力的应力称为极限应力。塑性材料和脆性材料的极限应力分别是屈服极限 σ_s(或名义屈服极限 $\sigma_{0.2}$)和强度极限 σ_b。极限应力除以安全系数，称为材料的许用应力，即 $[\sigma]=\dfrac{\sigma^0}{n}$，它是工程计算中材料允许承受的最大应力。

为了确保杆件在工作中有足够的强度，要求杆内的最大工作应力不得超过材料的许用应力，即 $\sigma_{max}\leqslant[\sigma]$，这就是强度条件。利用这个条件可以解决三方面问题：①校核强度；

②确定荷载；③设计截面尺寸。

6．应变能

固体受外力作用而变形。在变形过程中，外力所做的功将转变为储存于固体内的能量。当外力逐渐减小时，变形逐渐恢复，固体又将释放出储存于固体内的能量而做功。固体在外力作用下，因变形而储存的能量称为应变能。轴向拉伸、压缩时，杆的应变能为 $V_\varepsilon=\dfrac{F^2 l}{2EA}$。应变能密度为 $v_\varepsilon=\dfrac{1}{2}\sigma\varepsilon$，或 $v_\varepsilon=\dfrac{\sigma^2}{2E}$，或 $v_\varepsilon=\dfrac{E\varepsilon^2}{2}$。

7．拉伸、压缩时超静定问题

当未知力的数目多于独立平衡方程的数目时，仅仅根据平衡方程是不能确定全部未知力的，称这类问题为超静定问题。求解超静定问题的关键在于建立数目与超静定次数相等的补充方程，而要建立补充方程，必须研究杆系变形的几何关系，建立起变形协调关系。求解超静定问题的步骤为：

（1）根据静力学知识，建立静力学平衡方程；

（2）分析杆系的几何变形关系，建立变形协调关系；

（3）使用物理关系(即变形公式)将变形协调关系转为补充方程；

（4）联立静力学平衡方程和补充方程，求解全部未知力。

装配应力：因强行装配而引起的杆件内的应力，称为装配应力。

温度应力：因温度变化而引起的杆件内的应力，称为温度应力。

8．应力集中的概念

因构件外形突然变化，而引起局部应力急剧增大的现象，称为应力集中。

9．连接件的实用强度计算

（1）剪切的实用计算。剪切面上的内力因其作用线位于剪切面上，故称之为剪力。剪切的受力和变形相当复杂，因此在工程中通常采用实用计算。即假设切应力在剪切面上是均匀分布的。剪应力计算公式为 $\tau=\dfrac{F_S}{A}$。为了保证连接件不被剪切破坏，要求最大剪应力不得超过材料的许用应力，即 $\tau\leqslant[\tau]$，这就是剪切强度条件。

（2）挤压的实用计算。引起挤压的压力称为挤压力，挤压力是连接件与被连接件之间的相互作用力，在性质上属于外力，习惯上把挤压面上的压强称为挤压应力。考虑到挤压应力在挤压面上分布的复杂性，因此在工程中通常采用实用计算，即取实际挤压面在垂直于挤压力的平面上的正投影面积作为名义挤压面积，并假设挤压应力在名义挤压面上是均匀分布的。挤压应力计算公式为 $\sigma_{bs}=\dfrac{F_{bs}}{A_{bs}}$。为了保证连接件不被挤压破坏，要求最大挤压应力不得超过材料的许用挤压应力，即 $\sigma_{bs,max}\leqslant[\sigma_{bs}]$，这就是挤压强度条件。

思　考　题

2.1　两根长度、横截面面积相同，但材料不同的等截面直杆。当它们所受轴力相等时，试说明：(1)两杆横截面上的应力是否相等？(2)两杆的强度是否相同？(3)两杆的总变形是否相等？

2.2　钢的弹性模量 $E=200\text{GPa}$，铜的弹性模量 $E=74\text{GPa}$。试比较：在应力相同的情况下，哪种材料的应变大？在相同应变的情况下，哪种材料的应力大？

2.3　拉伸时塑性材料呈杯口状断口，脆性材料沿横截面断裂，压缩时脆性材料沿与轴线成 $45°$的方向断裂。试用斜截面上的应力情况分析说明断裂现象的原因。

2.4　什么是许用应力？什么是强度条件？应用强度条件可以解决哪些方面的问题？

2.5　胡克定律有哪两种表达方式？在什么条件下适用？截面抗拉(压)刚度是什么？

2.6　一根钢筋试样，其弹性模量为 $E=210\text{GPa}$，比例极限为 $\sigma_P=210\text{MPa}$，在轴向拉力 F 作用下，纵向线应变为 $\varepsilon=0.001$。试求钢筋横截面上的正应力。若加大轴向拉力 F，使试样的纵向线应变增加到 $\varepsilon=0.01$。试问此时钢筋横截面上的正应力能否由胡克定律确定，为什么？

2.7　在受力物体内某点处，若测得 x 和 y 两方向均有线应变，试问在 x 和 y 两方向上是否一定有正应力？若仅测得 x 方向有线应变，试问 y 方向上是否一定没有正应力？若测得 x 和 y 两方向均没有线应变，试问在 x 和 y 两方向上是否一定没有正应力？为什么？

2.8　三根试件的尺寸相同，但材料不同，其 σ-ε 曲线如图 2.37 所示。试说明哪一种材料强度高，哪一种材料的弹性模量大，哪一种材料的塑性好。

2.9　试分析图 2.38 中钉盖的受剪面和挤压面，并写出受剪面和挤压面的面积。

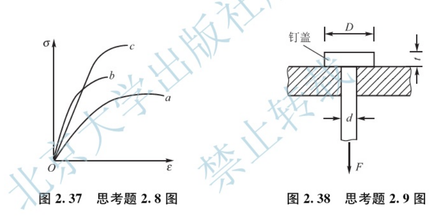


图 2.37　思考题 2.8 图　　　　图 2.38　思考题 2.9 图

习　　题

2.1　用截面法求如图 2.39 所示各杆指定截面的轴力。

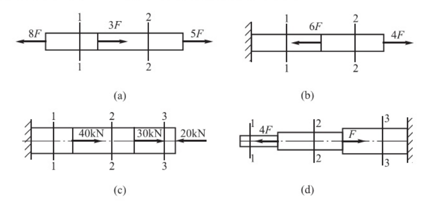


图 2.39　习题 2.1 图

2.2 试画出如图 2.40 所示各杆的轴力图。

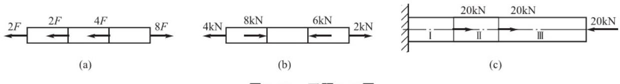


图 2.40 习题 2.2 图

2.3 在圆钢杆上铣去一槽，如图 2.41 所示。已知钢杆受拉力 $F=20\text{kN}$ 作用，钢杆直径 $d=20\text{mm}$。试求 1-1 和 2-2 截面上的应力(铣去槽的面积可近似看成矩形，暂不考虑应力集中)。

2.4 直径为 10mm 的圆杆，受拉力 $F=10\text{kN}$ 作用，如图 2.42 所示。试求杆内最大切应力，并求与横截面的夹角为 $\theta=30°$的斜截面上的正应力及切应力。



图 2.41 习题 2.3 图

图 2.42 习题 2.4 图

2.5 如图 2.43 所示结构中，AB 为刚性杆，CD 为圆形截面木杆，其直径为 $d=120\text{mm}$，力 $F=8\text{kN}$。试求 CD 杆的应力。

2.6 在如图 2.44 所示结构中，所有杆件都是钢制的，横截面面积均为 $A=3\times10^{-3}\text{m}^2$，力 $F=100\text{kN}$。试求各杆的应力。

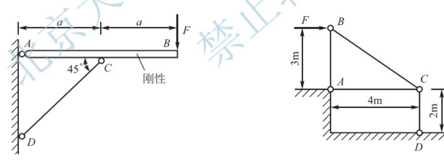


图 2.43 习题 2.5 图

图 2.44 习题 2.6 图

2.7 变截面直杆如图 2.45 所示，图示尺寸单位：mm。已知横截面面积分别为 $A_1=8\text{cm}^2$，$A_2=6\text{cm}^2$，弹性模量为 $E=200\text{GPa}$。试求杆的总变形 Δl。

2.8 如图 2.46 所示结构中，AB 杆为圆截面钢杆，其直径 $d=12\text{mm}$，在竖直力 F 作用下，测得 AB 杆的轴向线应变 $\varepsilon=0.000\,2$。已知钢材的弹性模量 $E=200\text{GPa}$，试求力 F 的大小。

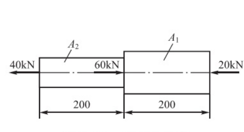


图 2.45 习题 2.7 图

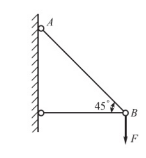


图 2.46 习题 2.8 图

2.9　如图 2.47 所示的厂房柱子，受到屋顶作用的荷载 $F_1=120\text{kN}$，起重机作用的荷载 $F_2=100\text{kN}$，柱子的弹性模量 $E=18\text{GPa}$，$l_1=3\text{m}$，$l_2=7\text{m}$，横截面面积 $A_1=4\times10^4\text{mm}^2$，$A_2=6\times10^4\text{mm}^2$。试绘制其轴力图，并求：(1)各段横截面上的应力；(2)最大切应力；(3)柱子的总变形 Δl。

2.10　一板状试件如图 2.48 所示，在其表面贴上纵向和横向的电阻应变片来测定试件的应变。已知 $h=4\text{mm}$，$b=30\text{mm}$，当施加 3kN 的拉力时，测得试件的纵向线应变 $\varepsilon_1=120\times10^{-6}$，横向线应变 $\varepsilon_1'=120\times10^{-6}$。求试件材料的弹性模量 E 和泊松比 μ。

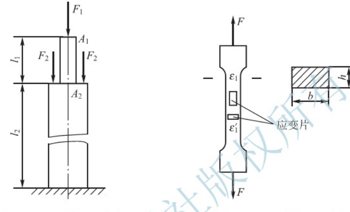


图 2.47　习题 2.9 图　　　　图 2.48　习题 2.10 图

2.11　一根直径 $d=10\text{mm}$ 的圆截面直杆，在轴向拉力 $F=14\text{kN}$ 作用下，直径减小了 0.0025mm。已知材料的弹性模量 $E=200\text{GPa}$，试求材料的横向变形系数 μ。

2.12　一木桩受力如图 2.49 所示，木桩的横截面为边长 $a=200\text{mm}$ 的正方形，材料可认为符合胡克定律，其弹性模量 $E=10\text{GPa}$，如不计木桩自重，试绘制木桩的轴力图。并求：(1)各段柱横截面上的应力；(2)各段柱的纵向线应变；(3)柱的变形。

2.13　如图 2.50 所示实心圆钢杆 AB 和 AC 在 A 点以铰链相连接，在 A 点作用有铅垂向下的力 $F=35\text{kN}$。已知杆 AB 和 AC 的直径分别为 $d_1=12\text{mm}$，$d_2=15\text{mm}$，钢的弹性模量 $E=210\text{GPa}$。试求 A 点在铅垂方向的位移。

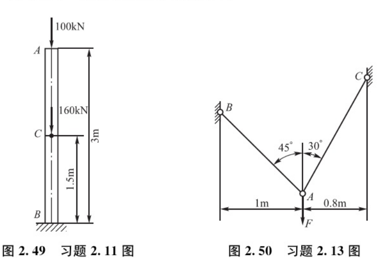


图 2.49　习题 2.11 图　　　　图 2.50　习题 2.13 图

2.14　如图 2.51 所示混凝土桩，已知混凝土的密度 $\rho=2.25\times10^3\text{kg/m}^3$，许用压应力 $[\sigma]=2\text{MPa}$。试按照强度条件确定混凝土桩所需的横截面面积 A_1 和 A_2。若混凝土的弹性模量 $E=20\text{GPa}$。试求桩顶 A 的位移。

2.15 一内半经为 r、壁厚为 δ，宽度为 b 的薄壁圆环，在圆环的内表面承受均匀分布的压力 p 作用，材料的弹性模量为 E，如图 2.52 所示。试求：(1)由内压力引起的圆环径向截面上的应力；(2)由内压力引起的圆环半径的伸长。

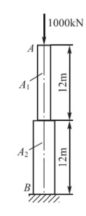


图 2.51 习题 2.14 图

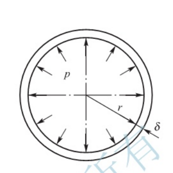


图 2.52 习题 2.15 图

2.16 设 CG 为刚体梁，BC 为铜杆，DG 为钢杆，两杆的横截面面积分别为 A_1 和 A_2，弹性模量分别为 E_1 和 E_2。今在 CG 梁上作用一力 F，如图 2.53 所示，如果要求 CG 始终保持水平位置，试求 x。

2.17 某悬臂吊车如图 2.54 所示，最大起重荷载 F=15kN，AB 杆为 Q235 钢，许用应力 $[\sigma]$=120MPa。试设计 AB 杆的直径 d。

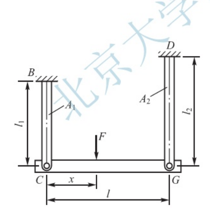


图 2.53 习题 2.16 图

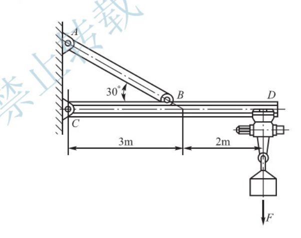


图 2.54 习题 2.17 图

2.18 如图 2.55 所示结构中，杆①和杆②均为圆截面钢杆，其直径分别为 d_1=16mm 和 d_2=20mm，力 F=40kN，钢材的许用应力 $[\sigma]$=160MPa。试分别校核杆①和杆②的强度。

2.19 在如图 2.56 所示简易吊车中，AB 为木杆，BC 为钢杆。木杆 AB 的横截面面积 A_1=100cm^2，许用应力 $[\sigma]_1$=7MPa；钢杆 BC 的横截面面积 A_2=6cm^2，许用应力 $[\sigma]_2$=160MPa，两杆的自重不计。试求许可吊重 F。

2.20 一汽缸如图 2.57 所示，其内径 D=560mm，汽缸内的气体压强 p=2.4MPa，活塞杆的直径 d_1=100mm，所用材料的屈服极限 σ_s=300MPa。(1)求活塞杆的工作安全系数。(2)若连接汽缸与汽缸盖的螺栓直径 d=30mm，螺栓所用材料的许用应力 $[\sigma]$=

60MPa，求所需的螺栓数。

2.21　一刚性杆 AB 的左端铰支，两根长度相等、横截面面积相同的钢杆 CD 和 EF 使该刚性杆处于水平位置，如图 2.58 所示。如果 $F=50\text{kN}$，两根钢杆的横截面面积 $A=1\,000\text{mm}^2$，试求两杆的轴力和应力。

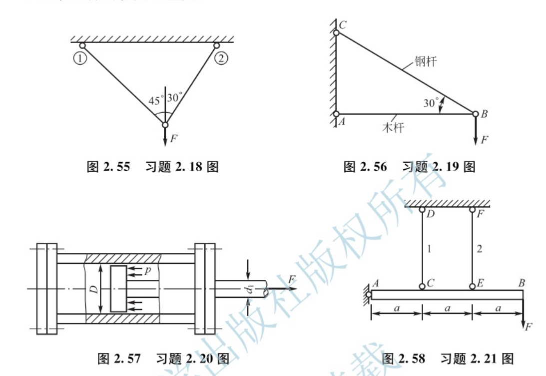


图 2.55　习题 2.18 图　　图 2.56　习题 2.19 图

图 2.57　习题 2.20 图　　图 2.58　习题 2.21 图

2.22　如图 2.59 所示刚性梁受均布荷载作用，梁在 A 端铰支，在 B 点和 C 点由两根钢杆 BD 和 CE 支撑。已知钢杆 BD 和 CE 的横截面面积 $A_2=200\text{mm}^2$，$A_1=400\text{mm}^2$，钢的许用应力 $[\sigma]=170\text{MPa}$。试校核钢杆的强度。

2.23　如图 2.60 所示梁 AB 受集中力 F 作用，已知 AD、CE 和 BF 的横截面面积均为 A，材料的许用应力为 $[\sigma]$，梁 AB 可视为刚体。试求图示结构的许可荷载 $[F]$。

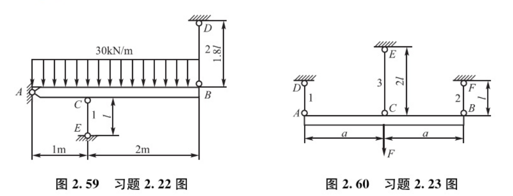
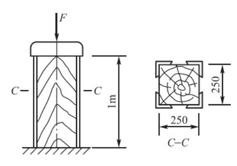


图 2.59　习题 2.22 图　　图 2.60　习题 2.23 图

2.24　横截面为 250mm×250mm 的短木桩，用四根 40mm×40mm×5mm 的等边角钢加固，并承受压力 F 作用，如图 2.61 所示。已知角钢的许用应力 $[\sigma]_1=160\text{MPa}$，弹性模量 $E_1=200\text{GPa}$，木桩的许用应力 $[\sigma]_2=12\text{MPa}$，弹性模量 $E_2=10\text{GPa}$。试求短木桩的许可荷载 $[F]$。

2.25　如图 2.62 所示阶梯钢杆，$A_1=1\,000\text{mm}^2$，$A_2=500\text{mm}^2$，在 $t_1=5℃$时将该杆的两端固定，试求当温度升高到 $t_2=25℃$时，该杆各段的温度应力。



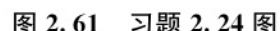


图 2.61　习题 2.24 图

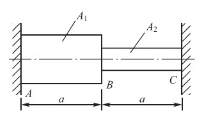


图 2.62　习题 2.25 图

2.26　设铺设铁轨时的温度为 10℃，夏天铁轨的最高温度是 60℃，每根铁轨长 8m，线膨胀系数 $\alpha=125\times10^{-7}$ 1/℃，$E=200$GPa。为了使轨道在夏天不发生挤压，问在铁轨之间应留多大的空隙？

2.27　两根材料不同但截面尺寸相同的杆件，同时固定连接于两端的刚性板上，且知，$E_1>E_2$，如图 2.63 所示。若使两杆都为均匀拉伸，试求拉力 P 的偏心距 e。

2.28　如图 2.64 所示杆 1 为钢杆，$E_1=210$GPa，$\alpha_1=12.5\times10^{-6}$(1/℃)，横截面面积为 $A_1=30\text{cm}^2$；杆 2 为铜杆，$E_2=105$GPa，$\alpha_2=19\times10^{-6}$(1/℃)，横截面面积为 $A_2=30\text{cm}^2$。设 $P=50$kN，若 AB 为刚杆，且始终保持水平，试问温度是升高还是降低？并求温度的改变值。

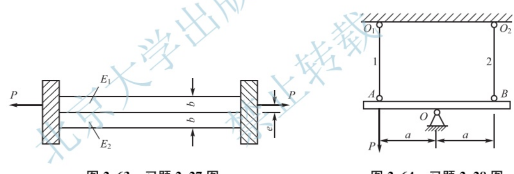


图 2.63　习题 2.27 图　　图 2.64　习题 2.28 图

2.29　设杆 1、2、3 的横截面面积和弹性模量均相同，$A=2\text{cm}^2$，$E=200$MPa，设计时长度也相同，$l=1$m，但在制造时杆 3 却短了 $\delta=0.08$cm，如图 2.65 所示。试计算安装后各杆的内力。(横梁自重和变形不计。)

2.30　如图 2.66 所示，两块厚度为 $\delta=10$mm 的钢板，用两个直径为 $d=17$mm 的铆钉搭接在一起，钢板受拉力 $F=35$kN。已知铆钉的 $[\tau]=80$MPa，$[\sigma_{bs}]=280$MPa。试校核铆钉的强度。

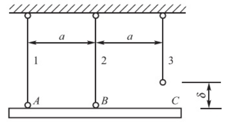


图 2.65　习题 2.29 图

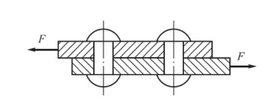


图 2.66　习题 2.30 图

2.31 已知钢板的厚度为 $\delta=5\text{mm}$，其剪切极限为 $\tau_u=300\text{MPa}$。用冲床将钢板冲出如图 2.67 所示形状的孔，问需要多大的冲剪力 F？

2.32 如图 2.68 所示螺钉受拉力作用，已知图中尺寸 $D=32\text{mm}$，$d=20\text{mm}$，$h=12\text{mm}$，材料的许用切应力 $[\tau]=100\text{MPa}$，许用挤压应力 $[\sigma_{bs}]=150\text{MPa}$。试校核螺钉的剪切强度和挤压强度。

2.33 如图 2.69 所示螺钉受拉力作用，已知材料的剪切许用应力 $[\tau]$ 和拉伸许用应力 $[\sigma]$ 之间的关系为 $[\tau]=0.6[\sigma]$。试求螺钉直径 d 与钉头高度 h 的合理比值。

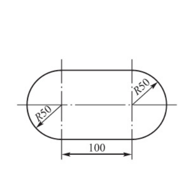


图 2.67 习题 2.31 图

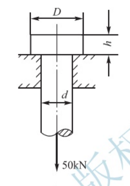


图 2.68 习题 2.32 图

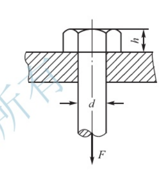
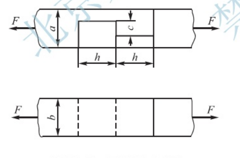
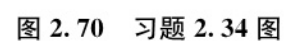


图 2.69 习题 2.33 图

2.34 木榫接头如图 2.70 所示。已知 $a=b=12\text{cm}$，$h=35\text{cm}$，$c=4.5\text{cm}$，$F=40\text{kN}$。试求接头的剪切应力和挤压应力。

2.35 如图 2.71 所示的键连接，轴的直径 $d=80\text{mm}$，键的尺寸 $b=24\text{mm}$，$h=14\text{mm}$，键的许用应力 $[\tau]=40\text{MPa}$，$[\sigma_{bs}]=90\text{MPa}$。若轴通过键所传递的力矩 $M=2.8\text{kN}\cdot\text{m}$，求键的长度 l。




图 2.70 习题 2.34 图

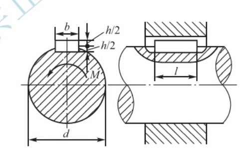


图 2.71 习题 2.35 图

2.36 水轮发电机组的卡环尺寸如图 2.72 所示(尺寸单位：mm)。已知轴向荷载 $F=1450\text{kN}$，卡环材料的许用切应力 $[\tau]=50\text{MPa}$，许用挤压应力 $[\sigma_{bs}]=150\text{MPa}$。试校核卡环的强度。

2.37 正方形截面的混凝土桩，其横截面边长为 200mm，其基底部为边长 $a=1\text{m}$ 的正方形混凝土板。混凝土桩承受轴向压力 $F=100\text{kN}$ 作用，如图 2.73 所示。假设地基对混凝土板的支反力为均匀分布，混凝土的许用切应力 $[\tau]=1.5\text{MPa}$，混凝土桩自重不计。试问为使混凝土桩不穿过板，混凝土板所需的最小壁厚为 δ 应为多少？

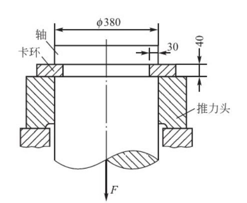


图 2.72 习题 2.36 图

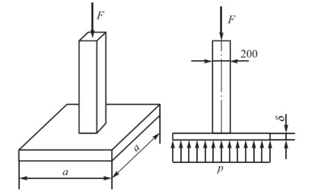


图 2.73 习题 2.37 图

2.38 如图 2.74 所示一螺栓接头，已知拉力 $F=40\text{kN}$，螺栓的许用切应力 $[\tau]=130\text{MPa}$，许用挤压应力 $[\sigma_{\text{bs}}]=300\text{MPa}$。试按强度条件计算螺栓所需的直径。

2.39 如图 2.75 所示一螺栓接头。已知拉力 $F=80\text{kN}$，图中尺寸 $b=80\text{mm}$，$\delta=10\text{mm}$，$d=22\text{mm}$，螺栓的许用切应力 $[\tau]=130\text{MPa}$，许用挤压应力 $[\sigma_{\text{bs}}]=300\text{MPa}$，许用拉应力 $[\sigma]=170\text{MPa}$。试校核接头的强度。

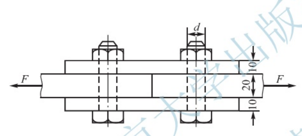


图 2.74 习题 2.38 图

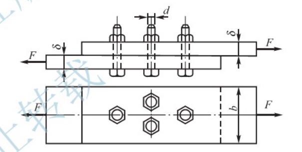


图 2.75 习题 2.39 图

第3章
截面的几何性质

教学目标

理解截面的静矩、极惯性矩、惯性矩、惯性积的概念
熟练掌握由截面的静矩求形心的方法
熟练掌握矩形、圆形、圆环形截面惯性矩、极惯性矩的计算方法
掌握用惯性矩平行移轴公式求组合平面惯性矩
了解惯性矩和惯性积的转轴公式

教学要求

知识要点	能力要求	相关知识
静矩	(1) 理解截面静矩的概念 (2) 利用积分式或静矩与形心坐标间的关系，求整个截面或部分截面对轴的静矩	形心的概念 积分的概念
极惯性矩和惯性矩	(1) 理解截面极惯性矩、惯性矩的概念 (2) 掌握矩形、圆形、圆环形截面惯性矩和极惯性矩的计算方法	积分的概念
惯性积	(1) 理解截面惯性积的概念	积分的概念
平行移轴公式	(1) 理解截面极惯性矩、惯性矩的概念 (2) 利用平行移轴公式计算组合截面的惯性矩、惯性积	积分的概念
转轴公式	(1) 了解惯性矩和惯性积的转轴公式 (2) 利用转轴公式，确定形心主轴的方位	形心的概念 积分的概念

引言

材料力学所研究的各种杆件，其横截面都是具有一定几何形状的平面图形，例如，矩形、圆形、工字形、T形、槽形等。工程实践证明，杆件的强度、刚度和稳定性均与截面的几何形状和尺寸有关。比如在分析轴向拉压问题时，用到了杆件横截面面积A，在材料的许用应力$[\sigma]$相同的条件下，截面积A

越大，则杆件承受拉伸或压缩的能力也越强；在材料、杆长及受力情况不变的条件下，截面积 A 越大，杆件的变形就越小。在即将讲到的扭转、弯曲、组合变形、压杆稳定等问题的研究中还将出现静矩、惯性矩、惯性半径等，这些只与杆件截面形状和尺寸有关的几何量统称为截面几何性质。本章主要介绍截面几何性质的定义与计算方法。

3.1 截面的静矩(面积矩)和形心位置

1. 重心与形心

物体的重力就是地球对物体的引力。若将物体视为无数微元的集合，每个微元均受重力作用，则物体所受的地心引力可以近似认为是一空间平行力系，此平行力系的合力即为物体的重力。实验证明，无论物体怎样放置，它所受的平行力系的合力永远通过物体内一个确定的点，这一点称为重心。

图 3.1 所示为受重力 W 作用的物体，在 $Oxyz$ 坐标系中，其重心 C 的坐标为 x_C、y_C、z_C。任一微元的重力为 ΔW_i，其作用点为 $C_i(x_i, y_i, z_i)$。根据合力矩定理，合力 W 对某一轴之矩等于各个分力对同轴之矩的代数和。

图 3.1 物体的重心

对于 y 轴有

$$M_y(W)=\sum_{i=1}^{n}M_y(\Delta W_i)$$

即

$$W\cdot x_C=\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_i\cdot x_i)$$

$$x_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_i\cdot x_i)}{W}$$

同理可求 y_C、z_C

$$\left.\begin{aligned}y_C&=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_i\cdot y_i)}{W}\\ z_C&=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_i\cdot z_i)}{W}\end{aligned}\right\}$$

若使 $n\to\infty$，则重心坐标的一般公式为

$$
\left.\begin{aligned}
x_C &= \frac{\int_V \rho g x \,\mathrm{d}V}{\int_V \rho g \,\mathrm{d}V} \\
y_C &= \frac{\int_V \rho g y \,\mathrm{d}V}{\int_V \rho g \,\mathrm{d}V} \\
z_C &= \frac{\int_V \rho g z \,\mathrm{d}V}{\int_V \rho g \,\mathrm{d}V}
\end{aligned}\right\} \tag{3-1}
$$

式(3－1)的各式中，ρg 为物体单位体积的重量(N/m³)，称为重度，$\mathrm{d}V$ 为微元体积。对于均质材料物体，ρg 为常数，于是重心坐标公式可以简化为

$$
\left.\begin{aligned}
x_C &= \frac{\int_V x \,\mathrm{d}V}{V} \\
y_C &= \frac{\int_V y \,\mathrm{d}V}{V} \\
z_C &= \frac{\int_V z \,\mathrm{d}V}{V}
\end{aligned}\right\} \tag{3-2}
$$

由此可知，均质物体的重心位置仅决定于物体的几何形状和尺寸。这时，重心又可视为物体的形心，或者说均质物体的重心与形心重合。

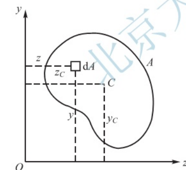


图 3.2　平面图形的形心

对于均质等厚度平板(图 3.2)，$\mathrm{d}V = t\mathrm{d}A$，$V = tA$($t$ 为板厚)，重心或形心的坐标表达式为

$$
\left.\begin{aligned}
y_C &= \frac{\int_A y \,\mathrm{d}A}{A} \\
z_C &= \frac{\int_A z \,\mathrm{d}A}{A}
\end{aligned}\right\} \tag{3-3}
$$

式中，$\mathrm{d}A$ 为平板的微面积。

对于平面图形，其形心公式显然与式(3－3)相同。同时，我们也可以根据截面对称轴的情况，使用观察法确定截面的形心位置。

(1) 若截面具有两条对称轴，则两条对称轴的交点必为截面的形心，如图 3.3 所示。

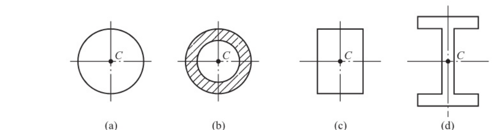


图 3.3　具有两条对称轴的截面

(2) 若截面只有一条对称轴，则形心必为该轴上的一点，只需求出这一点的另一坐标就可确定其形心位置，如图 3.4 所示。

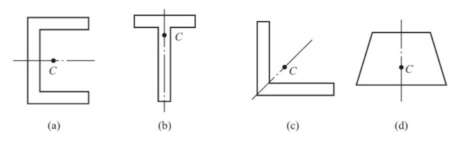


图 3.4 具有一条对称轴的截面

2. 静矩(The First Moment of the Area)

图 3.2 为任意形状的截面图形，其截面面积为 A，y 轴和 z 轴为该图形所在平面内的坐标轴。在图形内任取一微面积 $\mathrm{d}A$，其坐标分别为 y、z，则乘积 $z\mathrm{d}A$ 和 $y\mathrm{d}A$ 分别称为微面积 $\mathrm{d}A$ 对于 y 轴和 z 轴的静矩，积分

$$\left.\begin{aligned} S_y &= \int_A z\mathrm{d}A \\ S_z &= \int_A y\mathrm{d}A \end{aligned}\right\} \tag{3-4}$$

分别称为截面图形对于 y 轴和 z 轴的静矩。

截面的静矩是对一定的轴而言的，同一截面对于不同的轴，其静矩不同。从式(3-4)可知，静矩的值可正，可负，也可为零。静矩的量纲为［长度］^{3}，其常用单位为 m^3 或 mm^3。

截面图形的形心坐标也可以表示成静矩的形式，由式(3-3)和式(3-4)可得

$$\left.\begin{aligned} y_C &= \frac{S_z}{A} \\ z_C &= \frac{S_y}{A} \end{aligned}\right\}$$

或改写为

$$\left.\begin{aligned} S_y &= Az_C \\ S_z &= Ay_C \end{aligned}\right\} \tag{3-5}$$

由以上两式可知，若已知截面图形的面积及其对 y 轴与 z 轴的静矩时，则可确定该截面图形的形心坐标；反之亦然。据此可得到如下结论：

(1) 若截面对于某一轴的静矩等于零，则该轴必定通过截面形心。

(2) 截面对于通过形心的轴的静矩恒等于零。

3. 组合截面的静矩与形心

在工程结构中，常碰到一些形状比较复杂的截面，例如图 3.5 所示的一些截面，此类截面可视为由若干个简单图形(如矩形、圆形、三角形等)或标准型材截面组合而成，这种截面称为组合截面。

由于简单图形的面积及其形心位置均为已知，而且，由静矩的定义可知，截面图形对某一轴的静矩，等于其所有组成部分对该轴静矩的代数和。因此，可按式(3-5)先计算出每一简单图形的静矩，然后求其代数和，得到整个截面图形的静矩。即

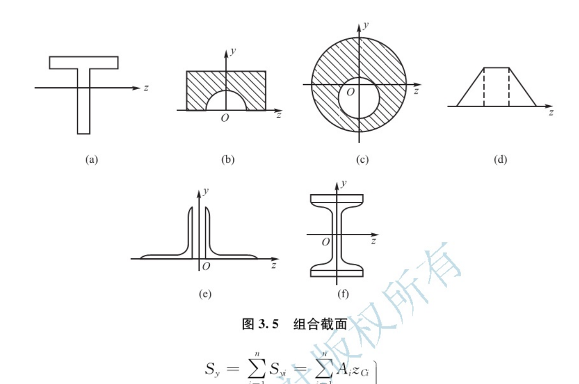


图 3.5　组合截面

$$\left.\begin{aligned} S_y &= \sum_{i=1}^{n} S_{yi} = \sum_{i=1}^{n} A_i z_{Ci} \\ S_z &= \sum_{i=1}^{n} S_{zi} = \sum_{i=1}^{n} A_i y_{Ci} \end{aligned}\right\} \tag{3-6}$$

式中，A_i 和 y_{Ci}、z_{Ci} 分别代表各简单图形的面积和形心坐标，n 为简单图形的个数。将该式代入(3-5)，可得计算组合截面形心(centroid of an area)坐标的公式，即



$$\left.\begin{aligned} y_C &= \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i y_{Ci}}{\sum A_i} \\ z_C &= \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i z_{Ci}}{\sum A_i} \end{aligned}\right\} \tag{3-7}$$

例 3.1　图 3.6 所示三角形，其直角边分别与 y 轴、z 轴重合，计算此三角形对 y、z 轴的静矩及它的形心坐标。

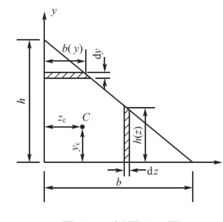


图 3.6　例题 3.1 图

解： 计算静矩 s_z 时，可取平行于 z 轴的狭长条作为微面积，其上各点的 y 坐标相等，$\mathrm{d}A=b(y)\mathrm{d}y$，如图 3.6 所示。由几何关系可知，$b(y)=\dfrac{b}{h}(h-y)$，因此 $\mathrm{d}A=\dfrac{b}{h}(h-y)\mathrm{d}y$，由静矩定义，得

$$S_z = \int_A y\mathrm{d}A = \int_0^h \frac{b}{h}(h-y)y\mathrm{d}y = \frac{bh^2}{6}$$

同理，计算 S_y 时，可取平行于 y 轴的狭长条作为微面积，即 $\mathrm{d}A=h(z)\mathrm{d}z$，其中，$h(z)=\dfrac{h}{b}(b-z)$，由静矩定义，得

$$S_y=\int_A z\mathrm{d}A=\int_0^b \frac{h}{b}(b-z)z\mathrm{d}z=\frac{hb^2}{6}$$

由式(3-5)，得形心坐标

$$y_C=\frac{S_z}{A}=\frac{bh^2/6}{bh/2}=\frac{h}{3}$$

$$z_C=\frac{S_y}{A}=\frac{hb^2/6}{bh/2}=\frac{b}{3}$$

例 3.2 图 3.7 为一对称的 T 形截面。试求该截面的形心位置。

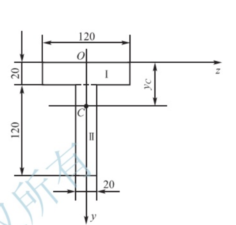


图 3.7 例题 3.2 图

解：本题是计算组合截面形心坐标的问题。图 3.7 所示截面有竖向对称轴，为计算方便，选取图 3.7 所示坐标系，其形心必在对称轴 y 上，故 $z_C=0$。将该组合截面分成Ⅰ、Ⅱ两个矩形，则

$A_1=20\times120=2\ 400(\mathrm{mm}^2)$， $y_{C1}=10\mathrm{mm}$

$A_2=120\times20=2\ 400(\mathrm{mm}^2)$， $y_{C2}=80\mathrm{mm}$

由式(3-7)计算组合截面图形的形心坐标为

$$y_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}A_i y_{Ci}}{\sum_{i=1}^{n}A_i}=\frac{A_1y_{C1}+A_2y_{C2}}{A_1+A_2}=\frac{2\ 400\times10+2\ 400\times80}{2\ 400+2\ 400}=45(\mathrm{mm})$$

3.2 惯性矩、极惯性矩和惯性积

1. 惯性矩(Moment of Inertia)

任意截面图形如图 3.8 所示，其面积为 A，在截面所在平面内建立任意的正交坐标系 Oyz。在坐标为$(y，z)$的任一点处，取一微面积 $\mathrm{d}A$，则 $y^2\mathrm{d}A$、$z^2\mathrm{d}A$ 分别称为微面积 $\mathrm{d}A$ 对于 z 轴和 y 轴的惯性矩，积分

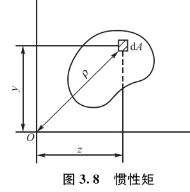


图 3.8 惯性矩

$$\left.\begin{aligned}I_z&=\int_A y^2\mathrm{d}A\\I_y&=\int_A z^2\mathrm{d}A\end{aligned}\right\}\qquad(3-8)$$

分别称为整个图形对于 z 轴和 y 轴的惯性矩，也称为整个图形对于 x 轴和 y 轴的二次轴矩。由上述定义可以看出同一截面对不同坐标轴的惯性矩一般也是不同的，但恒为正值。惯性矩的量纲为［长度］^{4}，其常用单位为 m^4 或 mm^4。

2. 惯性半径(Radius of Gyration of the Area)

力学计算中，有时把惯性矩写成图形面积 A 与某一长度的平方的乘积，即

$$I_z=A\cdot i_z^2,\quad I_y=A\cdot i_y^2\qquad(3-9)$$

或者改写为

$$i_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}},\quad i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{3-10}$$

式中，i_z、i_y 分别称为图形对于 z 轴和 y 轴的惯性半径。惯性半径的量纲为［长度］，其常用单位 m 或 mm。

3．极惯性矩(Polar Moment of Inertia)

当采用极坐标系时，图形微面积 dA 与其距极坐标原点 O 的距离 ρ(图 3.8)的平方的乘积的积分，称为此图形对坐标原点 O 的极惯性矩或截面二次极矩。即

$$I_P=\int_A \rho^2 \mathrm{d}A \tag{3-11}$$

由上述定义可知，截面的极惯性矩也恒为正，量纲为［长度］^{4}，其常用单位为 m^4 或 mm^4。由图 3.8 可以看出，$\rho^2=z^2+y^2$，代入式(3-11)，有

$$I_P=\int_A \rho^2 \mathrm{d}A=\int_A (z^2+y^2)\mathrm{d}A=\int_A z^2 \mathrm{d}A+\int_A y^2 \mathrm{d}A=I_y+I_z$$

即

$$I_P=I_z+I_y \tag{3-12}$$

式(3-12)表明，截面图形对其所在平面内任一点的极惯性矩 I_P，等于此图形对过此点的一对正交轴 z、y 的惯性矩 I_z、I_y 之和。

4．惯性积(Product of Inertia)

在图 3.8 中，微面积 dA 与其两个坐标(z，y)的乘积 $zy\mathrm{d}A$ 称为微面积 dA 对 z、y 轴的惯性积，则下述积分

$$I_{yz}=\int_A yz\,\mathrm{d}A \tag{3-13}$$

称为整个图形对于 y、z 轴的惯性积。由上述定义可知，惯性积的量纲为［长度］^{4}，其常用单位为 m^4 或 mm^4。

同惯性矩一样，同一截面对不同坐标轴的惯性积一般也是不同的。由于坐标乘积 yz 可能为正、也可能为负，因此，I_{yz} 的数值可能为正，可能为负，也可能等于零。例如，当整个截面位于第一象限时，由于所有微面积 dA 的 z、y 坐标均为正值，所以截面对这两个坐标轴的惯性积也必为正值。又如当整个截面位于第二象限时，由于所有微面积 dA 的 z 坐标为负，而 y 坐标为正，因而截面对这两个坐标轴的惯性积必为负值。若坐标轴中有一个是图形的对称轴，例如图 3.9 中的 y 轴，图中 y 轴两侧对称位置上的两块微面积 dA 的 y 坐标等值同号，而 z 坐标等值反号，致使两面积元素 dA 的惯性积 $zy\mathrm{d}A$ 等值反号。又因整个截面的惯性积等于 y 轴两侧所有微面积的惯性积之和，正负一一抵消，所以整个截面对 z、y 轴的惯性积必等于零。

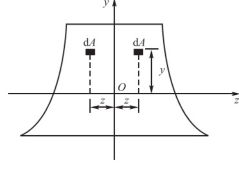


图 3.9　惯性积

由式(3-8)、式(3-12)、式(3-13)可得出如下

结论：

（1）极惯性矩 I_P 和惯性矩 I_z、I_y 恒为正值，而惯性积 I_{yz} 可能为正值或负值，也可能等于零。

（2）如果图形有一个（或一个以上）对称轴，则图形对包含此对称轴的正交轴系的惯性积 I_{yz} 必为零。

极惯性矩 I_P、惯性矩 I_z 和 I_y、惯性积 I_{yz} 的量纲均为［长度］^{4}，常用单位为 m^4 或 mm^4。

例 3.3 求如图 3.10 所示矩形截面，对通过其形心且与边平行的 z、y 轴的惯性矩 I_z、I_y 和惯性积 I_{yz}。

解： 取一平行于 z 轴的窄长条，其面积为 $dA=b dy$，则由惯性矩的定义，积分得

$$I_z=\int_A y^2 dA=\int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy=\frac{b}{3}y^3\Big|_{-h/2}^{h/2}=\frac{bh^3}{12}$$

同理可得

$$I_y=\frac{hb^3}{12}$$

因为 z、y 轴均为对称轴，故 $I_{yz}=0$。

例 3.4 求如图 3.11 所示直径为 d 的圆，对过圆心的任意轴（直径轴）的惯性矩 I_z、I_y 和对圆心 O 的极惯性矩 I_P。

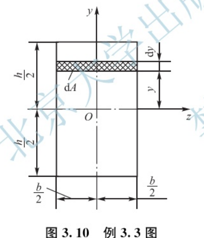


图 3.10 例 3.3 图

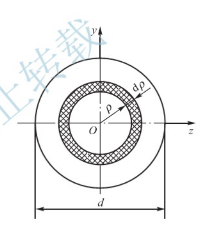


图 3.11 例 3.4 图

解： 首先求对圆心的极惯性矩。在离圆心 O 为 ρ 处作宽度为 $d\rho$ 的薄圆环，其面积为 $dA=2\pi\rho d\rho$，则圆截面对圆心的极惯性矩为

$$I_P=\int_A \rho^2 dA=\int_0^{d/2}\rho^2 2\pi\rho d\rho=2\pi\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{d/2}=\frac{\pi d^4}{32}$$

由于圆形对任意直径轴都是对称的，故 $I_z=I_y$。根据式(3-12)，并利用上式结果，可得

$$I_z=I_y=\frac{1}{2}I_P=\frac{\pi d^4}{64}$$

例 3.5 计算图 3.12 所示三角形截面对与底边重合的 z 轴的惯性矩。

解： 取平行于 z 轴的狭长条为微面积 dA，即

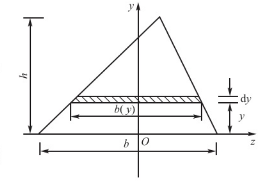


图 3.12 例 3.5 图

$$dA=b(y)dy$$

由图中可以看到

$$\frac{b(y)}{b}=\frac{h-y}{h}$$

由此得

$$dA=\frac{h-y}{h}b\,dy$$

故三角形截面对 z 轴的惯性矩为

$$I_z=\int_A y^2 dA=\int_0^h y^2\frac{h-y}{h}b\,dy=\frac{bh^3}{12}$$

3.3 组合截面的惯性矩和惯性积

1. 组合截面的惯性矩和惯性积

当一个截面图形是由若干个简单图形组成时，根据惯性矩的定义，整个截面图形对某一轴的惯性矩和惯性积等于各个简单图形对同一轴的惯性矩和惯性积的和。

即

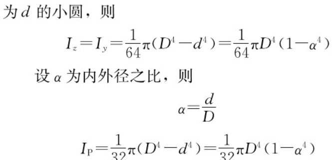
$$I_z=\sum_{i=1}^{n}I_{zi},\quad I_y=\sum_{i=1}^{n}I_{yi},\quad I_{zy}=\sum_{i=1}^{n}I_{zyi}\tag{3-14}$$

同理，截面图形对某点的极惯性矩等于各个简单图形对同一点的极惯性矩的和。即

$$I_P=\sum_{i=1}^{n}I_{Pi}\tag{3-15}$$

例 3.6 计算图 3.13 所示空心圆截面对于形心轴 z、y 轴的惯性矩和 O 点的极惯性矩。

解： 图中所示截面可视为直径为 D 的大圆减去直径为 d 的小圆，则



$$I_z=I_y=\frac{1}{64}\pi(D^4-d^4)=\frac{1}{64}\pi D^4(1-\alpha^4)$$

设 α 为内外径之比，则

$$\alpha=\frac{d}{D}$$

$$I_P=\frac{1}{32}\pi(D^4-d^4)=\frac{1}{32}\pi D^4(1-\alpha^4)$$

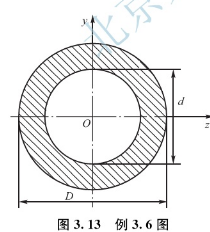


图 3.13 例 3.6 图

2. 惯性矩和惯性积的平行移轴公式

由惯性矩的定义可知，同一截面对于不同坐标轴的惯性矩、惯性积一般不相同，本节研究截面对任意轴以及与其平行的形心轴的两个惯性矩和惯性积之间的关系，即惯性矩和惯性积的平行移轴定理。

设一面积为 A 的任意形状的截面如图 3.14 所示。截面对任意的 z、y 两坐标轴的惯性矩和惯性积分别为 I_z、I_y 和 I_{yz}。另外，z_O、y_O 轴为过形心 C 的一对正交轴(形心轴)，

z_O、y_O 轴分别与 z、y 轴平行，C 点在 z、y 坐标系中的坐标为(b，a)。截面上任意一微面积元素 $\mathrm{d}A$ 在两坐标系内的坐标(z、y)和(z_O、y_O)之间的关系为

$$z=z_0+b,\quad y=y_0+a$$

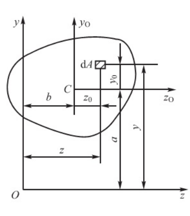


图 3.14 平行移轴公式

根据惯性矩的定义

$$\begin{aligned}I_z &= \int_A y^2 \mathrm{d}A = \int_A (a+y_0)^2 \mathrm{d}A \\ &= a^2\int_A \mathrm{d}A + 2a\int_A y_0 \mathrm{d}A + \int_A y_0^2 \mathrm{d}A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_y &= \int_A z^2 \mathrm{d}A = \int_A (b+z_0)^2 \mathrm{d}A \\ &= b^2\int_A \mathrm{d}A + 2a\int_A z_0 \mathrm{d}A + \int_A z_0^2 \mathrm{d}A\end{aligned}$$

$$I_{zy} = \int_A zy\,\mathrm{d}A = \int_A (b+z_0)(a+y_0)\mathrm{d}A = ab\int_A \mathrm{d}A + b\int_A y_0 \mathrm{d}A + a\int_A z_0 \mathrm{d}A + \int_A z_0 y_0 \mathrm{d}A$$

式中 $\int_A \mathrm{d}A = A$。因 z_O、y_O 轴通过形心，有

$$\left.\begin{aligned}\int_A z_0 \mathrm{d}A = 0\\ \int_A y_0 \mathrm{d}A = 0\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned}\int_A y_0^2 \mathrm{d}A = I_{z_O}\\ \int_A z_0^2 \mathrm{d}A = I_{y_O}\end{aligned}\right\}$$

故

$$\left.\begin{aligned}I_z &= I_{z_O} + a^2 A\\ I_y &= I_{y_O} + b^2 A\\ I_{zy} &= I_{z_O y_O} + abA\end{aligned}\right\} \tag{3-16}$$

式(3-16)称为平行移轴公式(parallel-axis theorem)。使用条件：两互移轴必须平行，且两轴中必须有一轴为形心轴。

不难看出，在互相平行的坐标轴中，截面对形心轴的惯性矩最小。

截面对任意轴的惯性矩，等于对与其平行的形心轴的惯性矩加上截面面积与两轴间距离平方的乘积；截面对某正交轴系 z、y 的惯性积，等于对与之相平行的一对正交形心轴 z_O、y_O 的惯性积，再加上形心 C 的坐标(b，a)与面积三者的乘积。但在使用中应注意，在惯性积的移轴公式中，a、b 是截面形心点在 Ozy 坐标系中的坐标，是有正负的。

应用平行移轴公式，可使较复杂的组合图形的惯性矩计算大为简化。下面举例说明这一公式的应用和组合截面惯性矩的计算。

例 3.7 图 3.15 所示工字形截面，由上、下翼缘与腹板组成，试计算截面对水平形心轴 z 的惯性矩。

解： 将截面划分为矩形Ⅰ、矩形Ⅱ和矩形Ⅲ三部分。

设矩形Ⅰ的形心点为 C_1，水平形心轴为 z_1，则由式(3-16)可知，矩形Ⅰ对 z 轴的惯性矩为

$$I_z^{\mathrm{I}} = I_{z_1}^{\mathrm{I}} + A_1 b_1^2 = \frac{3ab^3}{12} + 3ab\left(\frac{3}{2}b\right)^2 = 7ab^3$$

矩形Ⅱ的形心点与整个截面的形心 C 重合，故该矩形对 z 轴的惯性矩为

$$I_z^{\mathrm{II}}=\frac{1}{12}a(2b)^3=\frac{2}{3}ab^3$$

由于对称关系，矩形Ⅲ和矩形Ⅰ对 z 轴的惯性矩相等。

于是，整个截面对 z 轴的惯性矩为

$$I_z=I_z^{\mathrm{I}}+I_z^{\mathrm{II}}+I_z^{\mathrm{III}}=2I_z^{\mathrm{I}}+I_z^{\mathrm{II}}=2\times 7ab^3+\frac{2}{3}ab^3=\frac{44}{3}ab^3$$

例 3.8 求如图 3.16 所示图形对其水平形心轴 z 的惯性矩。

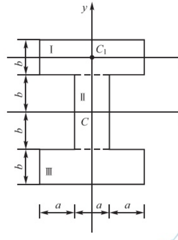


图 3.15 例 3.7 图

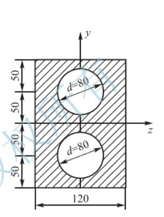


图 3.16 例 3.8 图

解：图形对 z 轴的惯性矩 I_z，等于整个矩形对 z 轴的惯性矩 I_{z1} 减去被挖空的两个圆形对 z 轴的惯性矩 I_{z2}，即 $I_z=I_{z1}-I_{z2}$。而

$$I_{z1}=\frac{bh^3}{12}=\frac{1}{12}\times 120\times 200^3\,\mathrm{mm}^4=80\times 10^6\,\mathrm{mm}^4$$

$$I_{z2}=2\times\left(\frac{\pi D^4}{64}+Aa^2\right)=2\times\left(\frac{\pi}{64}\times 80^4+50^2\times\frac{\pi}{4}\times 80^2\right)\mathrm{mm}^4=29.15\times 10^6\,\mathrm{mm}^4$$

由此得

$$I_z=I_{z1}-I_{z2}=(80-29.15)\times 10^6\,\mathrm{mm}^4=50.85\times 10^6\,\mathrm{mm}^4$$

为便于组合截面惯性矩的计算，表 3-1 给出了一些简单图形的形心位置及其对形心轴的惯性矩。各种型钢的惯性矩则可直接由型钢规格表中查得。

表 3-1 几种图形的形心位置和惯性矩

图形及形心 C	面积 A	惯性矩 I	惯性半径 i
y, C, z, z1, b, b	bh	$I_z=\frac{bh^3}{12}$ $I_{z_1}=\frac{bh^3}{3}$ $I_y=\frac{hb^3}{12}$	$i_z=\frac{\sqrt{3}}{6}h$ $i_y=\frac{\sqrt{3}}{6}b$
h, C, z_C, $\frac{h}{3}$, z, b	$\frac{1}{2}bh$	$I_z=\frac{bh^3}{12}$ $I_{z_C}=\frac{bh^3}{36}$	$i_{z_C}=\frac{\sqrt{2}}{6}h$

（续）

图形及形心 C	面积 A	惯性矩 I	惯性半径 i
	$\frac{\pi}{4}D^2$	$I_y=I_z=\frac{\pi}{64}D^4$	$i_y=i_z=\frac{D}{4}$
	$\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)$	$I_y=I_z=\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$ $=\frac{\pi}{64}D^4(1-\alpha^4)$ $\alpha=d/D$	$i_y=i_z=\frac{D}{4}\sqrt{1+\alpha^2}$
	$\frac{\pi}{2}R^2$	$I_z=I_y=\frac{\pi}{8}R^4$ $I_{z_C}=\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)R^4$	$i_y=\frac{R}{2}$ $i_{z_C}=\frac{R}{6\pi}\sqrt{9\pi^2-64}$
	πab	$I_z=\frac{\pi}{4}a^3b$ $I_y=\frac{\pi}{4}b^3a$	$i_z=\frac{a}{2}$ $i_y=\frac{b}{2}$

3.4 截面的主惯性轴和主惯性矩

1．惯性矩和惯性积的转轴公式

如图3.17所示的平面图形对 y、z 轴的惯性矩分别为 I_y、I_z，其惯性积是 I_{yz}。现将坐标系绕 O 点旋转 α 角，旋转时取逆时针方向转动的 α 角为正值，旋转后得新坐标轴 y_1、z_1。

新、旧坐标系下的坐标变换公式为

$$\left.\begin{aligned} z_1&=z\cos\alpha+y\sin\alpha \\ y_1&=y\cos\alpha-z\sin\alpha \end{aligned}\right\}$$

于是有

$$\begin{aligned} I_{z_1}&=\int_A y_1^2\mathrm{d}A=\int_A(y\cos\alpha-z\sin\alpha)^2\mathrm{d}A \\ &=\cos^2\alpha\int_A y^2\mathrm{d}A+\sin^2\alpha\int_A z^2\mathrm{d}A-2\sin\alpha\cos\alpha\int_A yz\mathrm{d}A \\ &=I_z\cos^2\alpha+I_y\sin^2\alpha-I_{yz}\sin2\alpha \end{aligned}$$

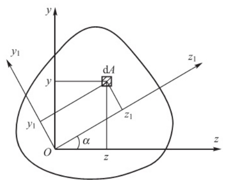


图3.17 惯性矩和惯性积的转轴公式

由于$\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos2\alpha)\\ \cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos2\alpha)\end{cases}$，上式可得

$$I_{z_1}=\frac{I_y+I_z}{2}+\frac{I_z-I_y}{2}\cos2\alpha-I_{yz}\sin2\alpha \tag{3-17}$$

同理可得

$$I_{y_1}=\frac{I_y+I_z}{2}-\frac{I_z-I_y}{2}\cos2\alpha+I_{yz}\sin2\alpha \tag{3-18}$$

$$I_{y_1z_1}=\frac{I_z-I_y}{2}\sin2\alpha+I_{yz}\cos2\alpha \tag{3-19}$$

以上三式称为转轴公式，它们确定了惯性矩与惯性积随转角 α 变化的规律。

将式(3－17) 与式(3－18)相加，得

$$I_{y_1}+I_{z_1}=I_y+I_z=\text{常数}=I_P$$

该式表明，截面图形对于过同一点的任意一对正交坐标轴的惯性矩之和为一常数，同时也等于截面图形对该点的极惯性矩 I_P。

2. 主惯性轴和主惯性矩

如前所述，同一截面对不同坐标轴的惯性矩 I_y、I_z 和惯性积 I_{yz} 的值各不相同；I_y、I_z 恒为正值；而 I_{yz} 可为正值、负值或零，主要视所选取的正交坐标系的位置而定。由于通过截面所在平面内的任一点可作无数个正交坐标系，因而可求出无数组 I_y、I_z 和 I_{yz} 的值。但是可以肯定，其中必然有一对特殊的正交坐标系，恰使截面对此正交坐标轴的惯性积 I_{yz} 为零。使截面图形的惯性积为零的一对互相垂直的轴为主惯性轴(principal axes)，简称主轴。截面对主轴的惯性矩称为主惯性矩(principal moment of inertia)。当一对主惯性轴的交点与截面形心重合时，则称这一对主惯性轴为形心主惯性轴(centroidal principal axes)，简称形心主轴。截面对这一对轴的惯性矩称为形心主惯性矩(centroidal principal moment of inertia)，它们是弯曲等问题中常用的重要几何性质。

由式(3－19)可知，$I_{y_1z_1}$ 是 α 的连续函数，随 α 角的变化，总可以找到这样一对正交的坐标轴 z_0、y_0，即截面对这对轴的惯性积 $I_{y_0z_0}=0$。这一对正交轴 z_0、y_0 即为截面的主轴。

设 z_0，y_0 轴的方位角为 α_0，则有

$$I_{y_0z_0}=0$$

$$I_{y_0z_0}=\frac{I_y-I_z}{2}\sin2\alpha_0+I_{yz}\cos2\alpha_0$$

$$\tan2\alpha_0=-\frac{2I_{yz}}{I_y-I_z} \tag{3-20}$$

满足式(3－20)的角度 α_0 和 $\alpha_0+\dfrac{\pi}{2}$，它们共同确定了主轴的位置。

此外，I_{y_1} 也是 α 的连续函数，惯性矩取得极值的坐标轴位置可由式$\dfrac{dI_{y_1}}{d\alpha}=0$ 确定。即

$$\frac{dI_{y_1}}{d\alpha}=-(I_y-I_z)\sin2\alpha-2I_{yz}\cos2\alpha=0$$

$$\tan 2\alpha = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} = \tan 2\alpha_0$$

$$\alpha = \alpha_0$$

由上述分析可知，惯性矩在主轴处取得极值，即两个主惯性矩 I_y、I_z，一个是极大值，另一个是极小值。

由式(3-20)，可求得 $\cos 2\alpha_0$ 和 $\sin 2\alpha_0$ 的表达式，如下

$$\cos 2\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\alpha_0}} = \frac{I_z - I_y}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2}}$$

$$\sin 2\alpha_0 = \tan 2\alpha_0 \cos 2\alpha_0 = \frac{-2I_{yz}}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2}}$$

将上式代入式(3-17)和式(3-18)中，可得主惯性矩 I_{y_0} 和 I_{z_0}。

若 $I_{y_0} > I_{z_0}$，则有

$$I_{\max} = I_{y_0} = \frac{I_z + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \tag{3-21}$$

$$I_{\min} = I_{z_0} = \frac{I_z + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \tag{3-22}$$

一对正交坐标轴中只要有一条为截面的对称轴，截面图形对于该坐标轴的惯性积恒等于零，所以可根据截面的对称轴情况来确定截面图形的形心主轴位置。

(1) 如果截面具有三条或三条以上的对称轴，过该截面形心的任何轴都是形心主轴，且截面对于任一形心主轴的惯性矩相等，如图 3.18(a)～(e)所示。

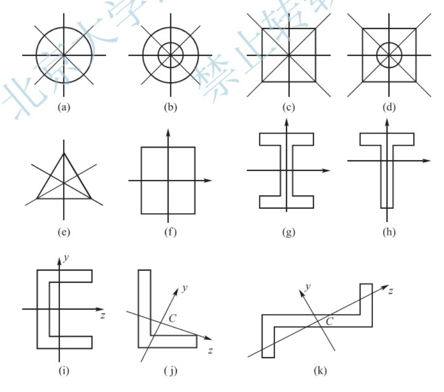


图 3.18　形心主轴

(2) 如果截面只有两条对称轴，则这两条轴就为截面的形心主轴，如图 3.18(f)、(g)所示。

(3) 如果截面只有一条对称轴，则该轴必为截面的形心主轴，而另一条形心主轴通过形心，并与此轴垂直，如图 3.18(h)、(i)所示。

(4) 如果截面没有对称轴，则由式(3－20)、式(3－21)和式(3－22)通过计算确定形心主轴的位置及主惯性矩的值，如图 3.18(j)、(k)所示。

一般情况下，确定非对称截面形心主轴及形心主惯性矩的步骤如下：

(1) 确定截面形心 C 点的位置。计算形心坐标时，通常选与截面周边重合的轴为参考坐标轴。

(2) 选择一对正交的形心轴 z_C、y_C(通常取与截面周边平行的形心轴为 z_C、y_C 轴)，用组合截面惯性矩计算及平行移轴公式得到截面对 z_C、y_C 轴的惯性矩和惯性积 I_{y_C}、I_{z_C} 和 $I_{y_Cz_C}$。

(3) 用式(3－20)计算形心主轴 z_0、y_0 的方位角 α_0，从而确定形心主轴的位置。

(4) 用式(3－21)和式(3－22)计算形心主惯性矩 I_{y_0}、I_{z_0}。

小　　结

1. 研究的意义

构件截面的几何性质(截面的形状尺寸、形心位置等)与强度、刚度、稳定性密切相关，在工程中常用改变构件截面几何性质的方法，提高构件的强度、刚度、稳定性，来满足构件的安全条件。

2. 基本概念

形心、静矩、惯性矩、极惯性矩、惯性半径、惯性积、主惯性轴、主惯性矩、形心主轴、形心主惯性矩。

(1) 形心

对于均质等厚度平板(平面图形)，重心或形心的坐标表达式为

$$\left.\begin{aligned} y_C &= \frac{\int_A y\,\mathrm{d}A}{A} \\ z_C &= \frac{\int_A z\,\mathrm{d}A}{A} \end{aligned}\right\}$$

组合截面形心坐标的公式为

$$\left.\begin{aligned} z_C &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i z_{Ci}}{\sum A_i} \\ y_C &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i y_{Ci}}{\sum A_i} \end{aligned}\right\}$$

(2) 静矩

截面图形对于 y 轴和 z 轴的静矩

$$\left.\begin{aligned} S_y &= \int_A z\,\mathrm{d}A \\ S_z &= \int_A y\,\mathrm{d}A \end{aligned}\right\}$$

截面图形的形心坐标也可以表示成静矩的形式

$$\left.\begin{aligned} z_C &= \frac{S_y}{A} \\ y_C &= \frac{S_z}{A} \end{aligned}\right\} \quad 或 \quad \left.\begin{aligned} S_z &= Ay_C \\ S_y &= Az_C \end{aligned}\right\}$$

① 若截面对于某一轴的静矩等于零，则该轴必定通过截面形心。

② 截面对于通过形心的轴的静矩恒等于零。

(3) 惯性矩

截面图形对于 z 轴和 y 轴的惯性矩为

$$\left.\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2\,\mathrm{d}A \\ I_y &= \int_A z^2\,\mathrm{d}A \end{aligned}\right\}$$

(4) 极惯性矩

截面图形对坐标原点 O 的极惯性矩或截面二次极矩为

$$I_{\mathrm{P}} = \int_A \rho^2\,\mathrm{d}A = \int_A (z^2 + y^2)\,\mathrm{d}A = I_z + I_y$$

(5) 惯性半径

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

(6) 惯性积

截面图形对 z、y 轴的惯性积为

$$I_{zy} = \int_A zy\,\mathrm{d}A$$

① 极惯性矩 I_{P} 和惯性矩 I_z、I_y 恒为正值，而惯性积 I_{zy} 可能为正值、负值，也可能等于零。

② 如果图形有一个(或一个以上)对称轴，则图形对包含此对称轴的正交轴系的惯性积 I_{zy} 必为零。

③ 整个截面图形对某一轴的惯性矩和惯性积等于各个简单图形对同一轴的惯性矩和惯性积的和，即

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} I_{zi}, \quad I_y = \sum_{i=1}^{n} I_{yi}, \quad I_{zy} = \sum_{i=1}^{n} I_{zyi}$$

截面图形对某点的极惯性矩等于各个简单图形对同一点的极惯性矩的和，即

$$I_{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{n} I_{\mathrm{P}i}$$

(7) 主惯性轴

截面图形对某对坐标轴惯性积为零，这对坐标轴称为该图形的主轴。

主轴方位角为

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$$

(8)主惯性矩

截面对主轴的惯性矩称为主惯性矩。

$$\left.\begin{aligned} I_{y_0} &= \frac{I_z + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \\ I_{z_0} &= \frac{I_z + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \end{aligned}\right\}$$

(9)形心主轴、形心主惯性矩

当一对主惯性轴的交点与截面形心重合时，则称这一对主惯性轴为形心主惯性轴，简称形心主轴。截面对这一对轴的惯性矩称为形心主惯性矩。

上述平面图形的几何性质都是对确定的坐标系而言的：静矩和惯性矩都是对一个坐标轴而言的；而惯性积则是对过一点的一对互相垂直的坐标轴而言的；极惯性矩则是对某一坐标原点而言的。

3. 知识要点

1）平行移轴公式

同一平面图形对于平行的两对坐标轴的惯性矩和惯性积并不相同。

平行移轴公式为

$$\left.\begin{aligned} I_z &= I_{z_O} + a^2 A \\ I_y &= I_{y_O} + b^2 A \\ I_{zy} &= I_{z_O y_O} + abA \end{aligned}\right\}$$

使用条件：两互移轴必须平行，且两轴中必须有一轴为形心轴。

(1) 图形对任意轴的惯性矩等于图形对于与该轴平行的形心轴的惯性矩，再加上图形面积与二轴间距离平方的乘积。

(2) 图形对任意一对直角坐标轴的惯性积等于图形对平行于该坐标轴的一对通过形心的直角坐标轴的惯性积，再加上图形面积与两对坐标轴之间距离的乘积。

因为面积恒为正，而 a^2 和 b^2 恒为正，故自形心轴移至与之平行的其他任意轴时，其惯性矩总是增加的；而自任意轴移至与之平行的形心轴时，其惯性矩总是减少的。

因为 a 和 b 为原坐标原点在新坐标系中的坐标，故二者同号时 abA 项为正值；二者异号时为负值。所以，移轴后的惯性积有可能增加，也有可能减少。

2）转轴公式

$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha$$

$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha$$

$$I_{y_1 z_1} = \frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha$$

式中，α 角以 y 轴为始边并以逆时针转向为正，反之为负。

思 考 题

3.1 什么是截面的静矩，其量纲是什么？截面对什么轴的静矩为零？什么是截面的惯性矩与惯性积，它们的量纲是什么？在什么情况下，截面的惯性积为零？

3.2 如何确定组合截面的形心的位置？什么是惯性半径？如何计算？

3.3 轴惯性矩与极惯性矩存在何种关系？

3.4 如图3.19所示，图(a)、(b)中阴影面积与非阴影面积的 S_z 有什么关系？为什么？图(c)、(d)中阴影面积Ⅰ与Ⅱ的 S_y，S_z 有什么关系？为什么？

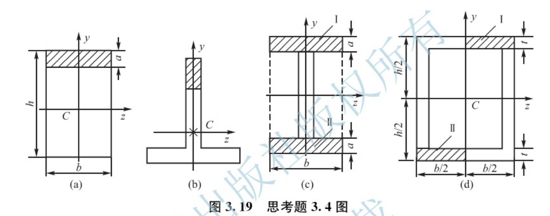


图3.19 思考题3.4图

3.5 上题图3.19(c)、(d)中阴影面积Ⅰ与Ⅱ的惯性矩 I_y、I_z 有什么关系？惯性积 I_{yz} 有什么关系？

3.6 形心轴与形心主轴有何区别？对称截面的形心主轴位于何处？

3.7 什么是平行移轴公式？有何用处？

习 题

3.1 试求图3.20所示平面图形的形心坐标 y_C。

3.2 求图3.21所示图形阴影部分的面积对 z 轴的静矩 S_z。

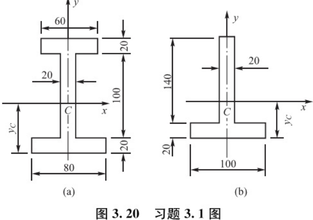




图3.20 习题3.1图

图3.21 习题3.2图

3.3　求图 3.22 所示图形对 z 轴的静矩 S_z，并确定其形心坐标 y_C。

3.4　如图 3.23 所示三角形 ABC，已知 $I_{z_1}=\dfrac{bh^3}{12}$，$z_2 /\!/ z_1$，试求 I_{z_2}。

3.5　已知三角形截面的底和高为 b 和 h，如图 3.24 所示。试求通过形心轴 x_C 的惯性矩 I_{x_C}。

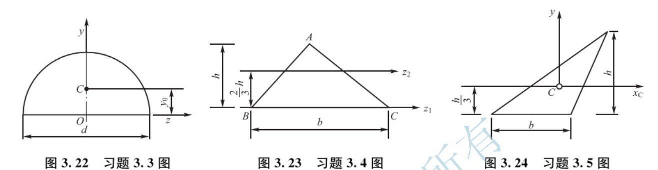


图 3.22　习题 3.3 图　　图 3.23　习题 3.4 图　　图 3.24　习题 3.5 图

3.6　如图 3.25 所示矩形截面图形，试求图形中阴影部分的面积对 x 轴、y 轴的惯性矩 I_x、I_y。

3.7　试求图 3.26 所示平面图形的形心主惯性矩。

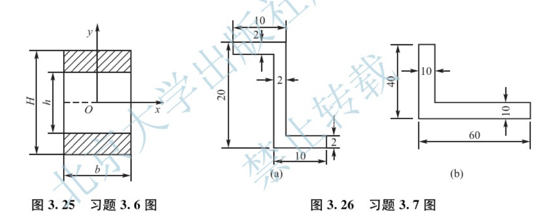


图 3.25　习题 3.6 图　　图 3.26　习题 3.7 图

第4章 扭　　转

教学目标

掌握扭矩的计算和扭矩图的绘制
了解薄壁圆筒扭转时的切应力、切应力互等定理、剪切胡克定律
掌握强度计算
掌握刚度计算
了解非圆截面杆扭转的概念

教学要求

知识要点	能力要求	相关知识
扭矩及扭矩图	(1) 掌握截面法求扭矩的步骤 (2) 熟练绘制扭矩图	平衡的概念
薄壁圆筒扭转	(1) 了解切应力 (2) 了解切应力互等定理 (2) 了解剪切胡克定律	静力学的概念 平衡的概念 弹性理论
强度计算	(1) 掌握圆轴扭转时切应力的概念 (2) 掌握强度条件的应用	微分的概念 极限的概念
刚度计算	(1) 掌握圆轴扭转时的变形计算 (2) 掌握强度条件的应用	微分的概念 极限的概念

引言

杆件的两端作用大小相等、方向相反且作用平面垂直于杆件轴线的力偶，致使杆件的任意两个横截面两端都发生绕轴线的相对转动，这就是扭转变形。

本章主要研究圆轴扭转时横截面上的切应力计算和扭转角计算；圆轴扭转时的强度条件和刚度条件；为此，首先通过薄壁圆筒的扭转，介绍两个基本定理(定律)——切应力互等定理和剪切胡克定律。

为了说明扭转变形，以汽车转向轴为例，如图4.1所示，轴的上端受到经由方向盘传来的力偶作用，下端则又受到来自转向器的阻抗力偶作用。再以攻丝锥的受力情况为例，如图4.2所示，通过绞丝下端则受到工件的阻抗力偶作用。这些都是扭转变形的实例。

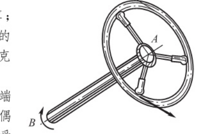


图4.1　汽车转向轴

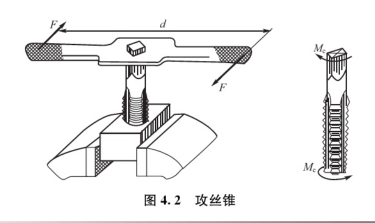


图 4.2　攻丝锥

4.1 外力偶矩的计算、扭矩及扭矩图

4.1.1　外力偶矩的计算

在研究杆件的扭转变形时，首先要确定作用在轴上的外力偶矩及横截面上的内力。而作用在轴上的外力偶矩往往不是直接给出的，通常给出的是轴所传递的功率和轴的转速。为了分析圆轴的受力情况，必须导出功率 P、转速 n 及外力偶矩 M 之间的关系。

在工程中，转速 n 的单位为转/分(r/min)，轴的角速度为 $\omega=\frac{2\pi n}{60}=\frac{\pi n}{30}$。外力偶矩 M 在时间 $\mathrm{d}t$ 内转过的角度为 $\mathrm{d}\varphi$，所做的功为 $\mathrm{d}W=M\mathrm{d}\varphi$，于是功率为

$$P=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{M\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=M\omega=\frac{M\pi n}{30}$$

从而得

$$M=\frac{30P}{\pi n} \tag{4-1a}$$

这是功率 P(W)、转速 n(r/min)与外力偶矩 M(N・m)之间的基本关系式。

当功率用 kW(千瓦)作单位时，则

$$M=9\ 549\ \frac{P}{n} \tag{4-1b}$$

当功率用 PS(马力)作单位时，则

$$M=7\ 024\ \frac{P}{n} \tag{4-1c}$$

由此可见，轴所承受的力偶矩与其传递的功率成正比，与轴的转速成反比，轴在传递同样的功率时，低速轴所受的力偶矩比高速轴的大。

4.1.2　扭矩及扭矩图

1. 扭矩(Torque)

确定外力偶矩后，便可以用截面法求任意横截面上的内力。如图 4.3(a)所示的圆截面

杆在两个等值反向的外力偶作用下发生扭转变形，为了确定任意一横截面 $m-m$ 上的内力，沿截面 $m-m$ 假想地将杆截开，保留左段［图 4.3(b)］，作用在左段上的外力只有一力偶 M，为了维持平衡，分布在横截面 $m-m$ 上的内力，必然构成一个内力偶与它平衡，该内力偶矩用 M_T 表示，可由平衡条件求其大小。列平衡方程

$$\sum M_x=0,\quad M_T-M=0$$

可得

$$M_T=M$$

M_T 称为 $m-m$ 横截面上的扭矩，它是该截面上分布内力的合力偶矩。

如保留右段［图 4.3(c)］，由平衡方程也可求得 $m-m$ 截面上的扭矩，其数值与取左段求得的相同，但方向相反。

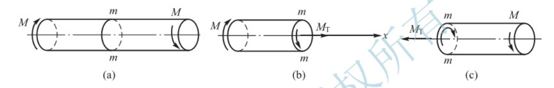


图 4.3 截面法求轴向拉伸杆件的内力

为了使取左段和取右段研究时，求得的扭矩不仅有相同的数值，而且有相同的正负号。对扭矩的正负号也可根据变形情况作如下规定：按右手螺旋法则，把扭矩用矢量表示，矢量背离截面时的扭矩为正，矢量指向截面时的扭矩为负。根据此规则，图 4.3(a)中 $m-m$ 横截面上的扭矩无论是取左段还是右段，都是正的。

2. 扭矩图(Torque Diagram)

当轴上同时有几个外力偶作用时，则不同轴段上扭矩不相同。为了表示扭矩随横截面位置变化的情况，可以作出扭矩图，作扭矩图的方法与作轴力图类似。

例 4.1 一传动轴的计算简图如图 4.4(a)所示，主动轮 A 输入功率为 $P_A=36.8\text{kW}$，从动轮 B、C、D 的输出功率分别为 $P_B=P_C=11.0\text{kW}$，$P_D=14.8\text{kW}$，轴的转速为 $n=300\text{r/min}$。试作该传动轴的扭矩图。

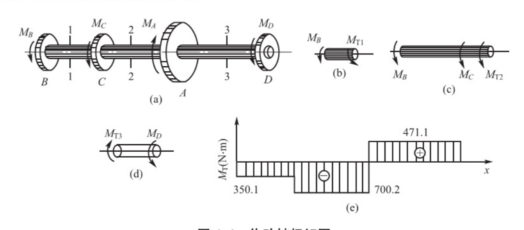


图 4.4 传动轴扭矩图

解：(1) 计算作用于各轮上的外力偶矩

$$M_A=9\ 549\frac{P_A}{n}=9\ 549\times\frac{36.8}{300}=1\ 171.3(\text{N}\cdot\text{m})$$

$$M_B = M_C = 9\ 549\,\frac{P_B}{n} = 9\ 549 \times \frac{11.0}{300} = 350.1(\text{N}\cdot\text{m})$$

$$M_D = 9\ 549\,\frac{P_D}{n} = 9\ 549 \times \frac{14.8}{300} = 471.1(\text{N}\cdot\text{m})$$

(2) 用截面法计算各段内的扭矩。在 BC 段内，沿 1－1 横截面截开，取左段为研究对象，设截开截面上的扭矩 M_{T1} 为正，如图 4.4(b)所示，由平衡方程

$$\sum M_x = 0,\quad M_{\text{T1}} + M_B = 0$$

得

$$M_{\text{T1}} = -M_B = -350.1(\text{N}\cdot\text{m})$$

得 M_{T1} 是负值，说明该截面上扭矩的转向与假设相反，即实际该截面上的扭矩为负。

同理，在 CA 段内，如图 4.4(c)所示，由平衡方程

$$\sum M_x = 0,\quad M_{\text{T2}} + M_C + M_B = 0$$

得

$$M_{\text{T2}} = -M_B - M_C = -700.2(\text{N}\cdot\text{m})$$

在 AD 段内［图 4.4(d)］，由平衡方程

$$\sum M_x = 0,\quad -M_{\text{T3}} + M_D = 0$$

得

$$M_{\text{T3}} = M_D = 471.1(\text{N}\cdot\text{m})$$

(3) 作扭矩图。以平行于轴线的横坐标表示横截面位置，以垂直于轴线的纵坐标表示对应横截面的扭矩，画扭矩图。由于在每一段内扭矩是不变的，所以扭矩图由三段水平线组成，如图 4.4(e)所示。由图可见，绝对值最大的扭矩 700.2N·m 发生在中间段内。

对同一根轴来说，若把主动轮 A 安置于轴的一端，例如放在右端，则轴的扭矩图如图 4.5 所示。这时，轴的绝对值最大扭矩为 1171.3N·m。可见，传动轴上主动轮和从动轮安置的位置不同，轴所承受的最大扭矩也就不同。两者相比，显然图 4.4 所示布局比较合理。

图 4.5　主动轮 A 安装在右端时轴的扭矩图

4.2 薄壁圆筒的扭转

4.2.1　薄壁圆筒扭转时的切应力

取一薄壁圆筒，在其表面画上若干等间距的圆周线和纵向线，形成许多小矩形，如图 4.6(a)所示，然后，在圆筒的两端面上施加一对大小相等转向相反的外力偶，使其发生扭转变形，如图 4.6(b)所示。在小变形下，可以观察到以下变形现象：

(1) 各圆周线的形状、大小、间距均未改变，只是彼此绕轴线发生了相对转动。

(2) 各纵向线都倾斜了相同的一个微小角度 γ，原来的小矩形变成平行四边形。

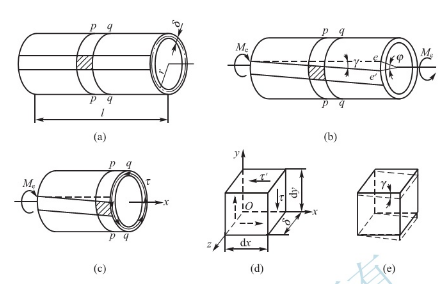


图 4.6 薄壁圆筒的扭转变形

根据上述试验现象，现在来分析薄壁圆筒扭转时的应力和变形。

(1) 由于圆周线的间距不变，且其形状和大小也不变，这表明横截面和纵向截面上均没有正应力。

(2) 用横截面和直径截面从筒中取出一个无限小的正六面体，称为单元体，如图 4.6(d)所示。据试验知，圆筒扭转时，单元体左右(或上下)两平面会发生相对错动，这种变形形式称为剪切；此时单元体的直角将产生微小改变，此改变量 γ 称为切应变(用弧度度量)。单元体左右两平面错动的方向垂直于横截面半径。

(3) 单元体发生剪切变形时，其左右面上(即薄壁圆筒的横截面)上必有切应力作用，如图 4.6(d)所示。由于各纵向线倾角相等，圆周线上各点处的切应力应相同；又因圆筒壁厚很薄，可认为切应力沿壁厚均布。切应力的方向垂直于横截面半径。

综上所述，薄壁圆筒扭转时，横截面上将产生切应力，其方向垂直于横截面半径，沿圆周和壁厚均匀分布。

切应力的数值，可由图 4.6(c)所示截面上的切应力合成结果，即扭矩这一静力学关系求得。

即由

$$M_T = 2\pi r\delta\tau r = 2\pi r^2\delta\tau$$

得

$$\tau = \frac{M_T}{2\pi r^2\delta} \tag{4-2}$$

扭转角 φ 与切应变 γ 的关系，可由几何关系求得，由图 4.6(b)可见

$$ee' = r\varphi \approx l\gamma$$

则得

$$\gamma = r\frac{\varphi}{l} \tag{4-3}$$

4.2.2 切应力互等定理(Shearing Stress Theorem)

设图 4.6(d)所示单元体各边的长度分别为 dx、dy 和 δ。由前面分析知，在单元体垂

直于 x 轴的两个平面上有切应力 τ，它们组成一个顺时针转向的力偶，其力偶矩为 $(\tau\delta \mathrm{d}y)\mathrm{d}z$，这个力偶将使单元体发生顺时针方向的转动。但是，实际上单元体仍处于平衡状态，所以在单元体垂直于 y 轴的两个平面上，必然有切应力 τ' 存在，并由它们组成另一个逆时针转向的力偶，其力偶矩为 $(\tau'\delta \mathrm{d}x)\mathrm{d}y$，以保持单元体的平衡。由平衡方程 $\sum M_z=0$ 得

$$(\tau'\delta \mathrm{d}x)\mathrm{d}y-(\tau\delta \mathrm{d}y)\mathrm{d}x=0$$

可得

$$\tau=\tau'$$

这表明：在单元体两两相垂直的平面上，切应力必同时存在，且它们的大小相等，方向同时指向(或背离)两截面的交线。这个规律称为切应力互等定理。这种在单元体各个平面上只有切应力而无正应力作用的应力状态称为纯剪切(pure shear)。

4.2.3　剪切胡克定律(Hooke's Law for Shear)

通过薄壁圆筒扭转试验可以得到材料在纯剪切下切应力与切应变间的关系。从零开始逐渐增加扭矩 M_T，并且记录对应的扭转角 φ，然后按式(4-2)和式(4-3)算出一系列的 τ 和 γ 的对应数值，便可在直角坐标系中画出 $\tau-\gamma$ 曲线。图 4.7 所示为低碳钢材料的 $\tau-\gamma$ 曲线。由试验结果可知，当切应力不超过材料的剪切比例极限时，切应力与切应变之间成正比关系，如图 4.7 中的直线部分。这一关系称为剪切胡克定律，其表达式为

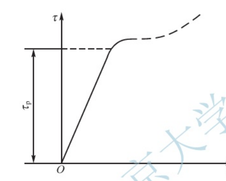


图 4.7　低碳钢扭转时的 $\tau-\gamma$ 曲线

$$\tau=G\gamma \tag{4-4}$$

式中，G 为材料的剪切弹性模量或切变模量，它表示材料抵抗剪切变形的能力，其量纲与应力相同。

到目前为止，已知材料的三个弹性常数：弹性模量 E，切变模量 G，泊松比 μ。一般来说，材料的弹性常数要通过试验确定。理论和试验均可证明，对于各向同性材料来说，三个弹性常数之间存在下列关系

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)} \tag{4-5}$$

所以，只要知道其中的任意两个弹性常数，就可确定第三个弹性常数。

4.3　圆轴扭转时的应力和强度计算

4.3.1　圆轴扭转时横截面上的切应力

分析圆轴扭转时横截面上的应力，需综合考虑变形几何关系、物理关系和静力学关系三个方面。

1. 几何关系(Geometrical Relationship)

先在圆轴表面画上许多圆周线和纵向线，形成许多小矩形，如图 4.8(a)所示。扭转后可观察到与薄壁圆筒扭转相同的变形现象：即各圆周线的形状、大小和间距均未改变，仅绕轴线作相对转动；各纵向线倾斜了同一微小角度 γ，仍近似为直线，如图 4.8(b)所示。

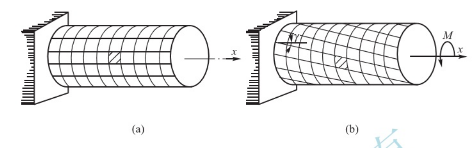


图 4.8 圆轴的扭转变形

根据观察到的表面变形现象，可假设：圆轴的横截面，在扭转后仍保持为平面，其形状和大小不变，半径仍保持为直线。这就是圆轴扭转时的平面假设。按照这一假设，在圆轴扭转变形时，各横截面就像刚性平面一样，绕轴线旋转了一个角度。

由此可以推论，圆轴扭转变形时横截面上不存在正应力，只有切应力，其方向与所在半径垂直，且与扭矩 M_T 的转向一致。

如图 4.9(a)所示，用相距为 dx 的两个横截面以及夹角很小的两个径向截面，从轴中截出一楔形体，如图 4.9(b)所示。设其左右两横截面相对扭转角为 $d\varphi$，距圆心为 ρ 的 g 点的切应变为 γ_ρ，根据式(4-3)有

$$\gamma_\rho=\rho\frac{d\varphi}{dx} \tag{4-6a}$$

式中，$\frac{d\varphi}{dx}$称为单位长度扭转角，一般与横截面的位置有关，但对于一个给定的横截面为常量。

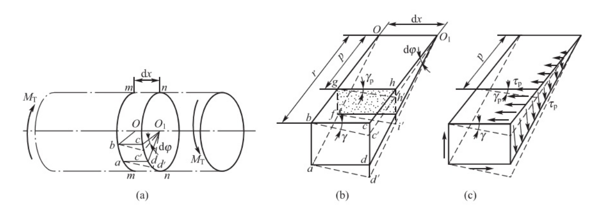


图 4.9 圆轴扭转时的切应力与切应变

2. 物理关系(Physical Relationship)

根据剪切胡克定律，在弹性范围内

$$\tau=G\gamma$$

将式(4-6a)代入上式，得

$$\tau_{\rho}=G\rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \tag{4-6b}$$

式(4-6b)表明，横截面上任意点的切应力 τ_{ρ} 与该点到圆心的距离 ρ 成正比。因而，所有与圆心等距离的点，其切应力均相同，且切应力的方向与半径相垂直。实心圆轴横截面上的切应力分布规律如图 4.10 所示。

3. 静力学关系(Static Relationship)

如图 4.11 所示，圆轴横截面微面积 $\mathrm{d}A$ 上的微内力为 $\tau_{\rho}\mathrm{d}A$，它对圆心的微力矩为 $\tau_{\rho}\mathrm{d}A\rho$。整个横截面上所有微力矩之和应等于该截面上的扭矩 M_{T}。即

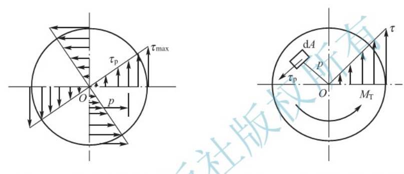


图 4.10　切应力分布规律　　　　图 4.11　圆轴切应力的计算

$$M_{\mathrm{T}}=\int_{A}\rho\tau_{\rho}\mathrm{d}A=\int_{A}G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\rho^{2}\mathrm{d}A=G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\int_{A}\rho^{2}\mathrm{d}A \tag{4-6c}$$

令 $I_{\mathrm{P}}=\int_{A}\rho^{2}\mathrm{d}A$，称为横截面的极惯性矩，将其代入式(c)得

$$M_{\mathrm{T}}=GI_{\mathrm{P}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\frac{M_{\mathrm{T}}}{GI_{\mathrm{P}}} \tag{4-6d}$$

式(4-6d)表示单位长度扭转角与扭矩间关系，是计算圆轴扭转角的基本公式。将该式代入式(4-6b)，即得圆轴扭转时横截面上任一点处切应力的计算公式。即

$$\tau_{\rho}=\frac{M_{\mathrm{T}}\rho}{I_{\mathrm{P}}} \tag{4-7}$$

显然，当 $\rho=0$ 时，$\tau_{\rho}=0$；当 $\rho=\rho_{\max}=R$ 时，切应力有最大值

$$\tau_{\max}=\frac{M_{\mathrm{T}}R}{I_{\mathrm{P}}}$$

令

$$W_{\mathrm{P}}=\frac{I_{\mathrm{P}}}{R}$$

则上式可改写为

$$\tau_{\max}=\frac{M_{\mathrm{T}}}{W_{\mathrm{P}}} \tag{4-8}$$

式中，W_{P} 为抗扭截面系数(section modulus under torsion)。

式(4－7)及式(4－8)是在平面假设的基础上并应用了剪切胡克定律推导出来的，故只适用于圆轴(空心或实心)，且只有当其 τ_{max} 不超过材料的比例极限时方可应用。

4. 极惯性矩和抗扭截面系数

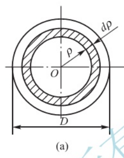
极惯性矩 I_P 和抗扭截面系数 W_P 可按其定义通过积分求得。下面介绍其计算方法。

对于实心圆轴［图 4.12(a)］，可在横截面上距圆心为 ρ 处取厚度为 $d\rho$ 的环形面积作为微面积 dA，于是 $dA=2\pi\rho d\rho$，从而可得实心圆截面的极惯性矩为

$$I_P=\int_A \rho^2 dA=\int_0^{\frac{D}{2}}\rho^2 2\pi\rho d\rho=\frac{\pi D^4}{32}$$

抗扭截面系数为

$$W_P=\frac{I_0}{D/2}=\frac{\pi D^3}{16}$$



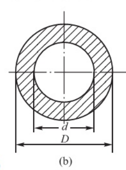


图 4.12 求极惯性矩

如为空心圆轴［图 4.12(b)］，则有

$$I_P=\int_A \rho^2 dA=\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}}\rho^2 2\pi\rho d\rho=\frac{\pi D^4}{32}-\frac{\pi d^4}{32}=\frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4)$$

式中，$\alpha=\frac{d}{D}$为空心圆轴内外径之比。空心圆轴截面的抗扭截面系数为

$$W_P=\frac{I_P}{D/2}=\frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)$$

极惯性矩 I_P 的量纲是长度的四次方，常用单位为 mm^4 或 m^4。抗扭截面系数 W_P 的量纲是长度的三次方，常用单位为 mm^3 或 m^3。

4.3.2 圆轴扭转时的强度计算

对于受多个外力偶作用的等直圆轴，最大切应力发生在最大扭矩 M_{Tmax} 所在截面的周边各点处。为了保证轴能正常工作，必须使其工作时的最大切应力 τ_{max} 不超过材料的许用切应力［τ］，于是等直圆轴扭转时的强度条件为

$$\tau_{max}=\frac{M_T}{W_P}\leqslant[\tau] \tag{4-9}$$

对于阶梯轴，因为各段 W_P 不同，所以 τ_{max} 不一定发生在 M_{Tmax}，必须综合考虑 W_P 及 M_{Tmax} 两个因素来确定。

许用切应力［τ］可据静荷载下薄壁圆筒扭转试验来确定。

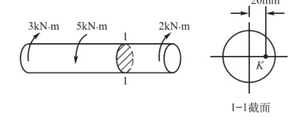


图 4.13 圆轴扭转

例 4.2 图 4.13 所示圆轴，直径 $d=60mm$，试求 1－1 截面上 K 点的切应力。

解：1－1 截面的扭矩为 $M_T=-2kN\cdot m$。1－1 截面上 K 点的切应力为

$$\tau_\rho=\frac{M_T\rho}{I_P}=\frac{M_T\rho}{\pi d^4/32}=\frac{2\times10^{-3}\times20\times10^{-3}}{\pi\times0.06^4/32}$$
$$=31.4(MPa)$$

计算切应力时，扭矩 M_T 以绝对值代入。因为切应力的正、负无实用意义，一般只计算其绝对值。

例 4.3 图 4.14(a)圆轴受力如图，已知直径 $d=60$mm，材料的许用切应力 $[\tau]=100$MPa。试校核该轴的强度。

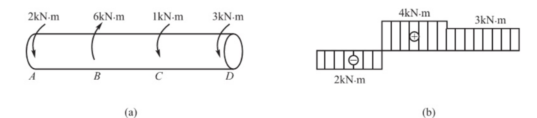


图 4.14 圆轴扭转

解：(1)绘制扭矩图。圆轴的扭矩图如图 4.14(b)所示。由图可知，圆轴的最大扭矩为 $M_{Tmax}=4\text{kN}\cdot\text{m}$。

(2) 强度校核

$$\tau_{max}=\frac{M_T}{W_P}=\frac{16M_T}{\pi d^3}=\frac{16\times4\times10^3}{\pi\times60^3\times10^{-9}}=94.4(\text{MPa})\leqslant[\tau]$$

故强度足够。

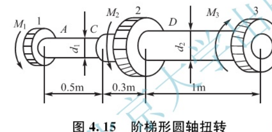


图 4.15 阶梯形圆轴扭转

例 4.4 如图 4.15 所示，阶梯形圆轴直径分别为 $d_1=40$mm，$d_2=70$mm，轴上装有三个带轮。已知由轮 3 输入的功率为 $P_3=30$kW，轮 1、轮 2 的输出功率分别为 $P_1=13$kW、$P_2=17$kW，轴的转速 $n=200$r/min，材料的许用切应力 $[\tau]=60$MPa。试校核轴的强度。

解：(1) 计算扭矩

AC 段 $$M_{T1}=M_1=9\ 549\frac{P_1}{n}=9\ 549\times\frac{13}{200}=621(\text{N}\cdot\text{m})$$

BD 段 $$M_{T2}=M_3=9\ 549\frac{P_{31}}{n}=9\ 549\times\frac{30}{200}=1\ 432(\text{N}\cdot\text{m})$$

(2)强度校核

AC 段 $$\tau_{max}=\frac{M_{T1}}{W_{P1}}=\frac{16M_{T1}}{\pi d_1^3}=\frac{16\times621}{\pi\times40^3\times10^{-9}}=49.4(\text{MPa})\leqslant[\tau]$$

BD 段 $$\tau_{max}=\frac{M_{T2}}{W_{P2}}=\frac{16M_{T2}}{\pi d_2^3}=\frac{16\times1\ 432}{\pi\times70^3\times10^{-9}}=21.3(\text{MPa})\leqslant[\tau]$$

故强度足够。

例 4.5 已知解放牌汽车传动轴如图 4.16(b)所示，传递的最大扭矩 $M=1930\text{N}\cdot\text{m}$，传动轴用外径 $D=89$mm，壁厚 $\delta=2.5$mm 的无缝钢管做成，材料为 20 钢，其许用切应力 $[\tau]=70$MPa。(1)试校核轴的强度。(2)如将传动轴改为实心轴，试在相同条件下确定轴的直径。(3)比较实心轴和空心轴的质量。

解：(1) 校核传动轴的强度。由已知条件可得传动轴内径为

传动轴

(a)

M_T A M_T B

(b)

图 4.16 汽车传动轴扭转

$$d=D-2\delta=89-2\times 2.5=84(\text{mm})$$

空心圆轴内外径比为

$$\alpha=\frac{d}{D}=\frac{84}{89}=0.944$$

代入强度条件式(4-9)，得

$$\tau_{\max}=\frac{M_T}{W_P}=\frac{M_T}{\frac{\pi D^3(1-\alpha^4)}{16}}=\frac{16\times 1\ 930}{\pi\times 89^3\times 10^{-9}\times(1-0.944^4)}=66.7(\text{MPa})\leqslant[\tau]$$

所以该轴的强度是足够的。

(2) 确定实心轴的直径。若实心轴与空心轴的强度相同，则两轴的抗扭截面系数应相等。设实心轴的直径为 D_1，则由

$$\frac{\pi D_1^3}{16}=\frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)$$

可得

$$D_1=D\cdot\sqrt[3]{1-\alpha^4}=89\times\sqrt[3]{1-0.944^4}=53(\text{mm})$$

(3) 比较空心轴与实心轴的质量。两轴的材料和长度相同，它们的质量之比就等于横截面面积之比，则有

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)}{\frac{\pi}{4}D_1^2}=\frac{D^2-d^2}{D_1^2}=\frac{89^2-84^2}{53^2}=0.31$$

可见，在其他条件相同的情况下，空心轴的质量仅为实心轴质量的 31%，节省材料的效果明显。这是因为切应力沿半径呈线性分布，实心轴圆心附近处应力较小，材料未能充分发挥作用。改为空心轴相当于把轴心处的材料移向边缘，从而提高了轴的强度。

4.4 圆轴扭转时的变形和刚度计算

4.4.1 圆轴扭转时的变形

由式(4-6d)，即$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{M_T}{GI_P}$可求得相距为 dx 的两横截面间的相对扭转角为

$$d\varphi=\frac{M_T}{GI_P}dx$$

积分便得相距为 l 的两横截面间的扭转角

$$\varphi=\int d\varphi=\int\frac{M_T}{GI_P}dx \tag{4-10}$$

对于等截面圆轴在两端面上受外力偶作用的情况，在长度 l 上 M_T、G、I_P 均为常量，则两端面间的扭转角为

$$\varphi=\frac{M_T l}{GI_P} \tag{4-11}$$

式中，GI_P 反映了截面抵抗扭转变形的能力，称为截面的抗扭刚度。GI_P 越大，则扭转角 φ 就越小。扭转角的单位是弧度。

若在两横截面之间的扭矩 M_T 或抗扭刚度 GI_P 为变量时，则应通过积分或分段计算出各段的扭转角，然后代数相加。

4.4.2 圆轴扭转时的刚度计算

机器中的某些轴类零件，除应满足强度要求外，对其扭转变形还应加以限制，即还要满足刚度要求。例如，车床主轴的扭转角过大，会引起较大的振动，影响被加工工件的表面粗糙度值。对于精密机械，刚度要求往往起着主要作用。

从式(4-11)可以看出，φ 的大小与 l 的长短有关。为了消除长度 l 的影响，工程中采用单位长度的扭转角(angle of twist per unit length)φ'来表示扭转变形程度。由式(4-6d)可得

$$\varphi'=\frac{d\varphi}{dx}=\frac{M_T}{GI_P} \tag{4-12a}$$

φ'的单位为弧度/米(rad/m)，工程中常用度/米(°/m)。由于 1 弧度$=\frac{180°}{\pi}$，所以

$$\varphi'=\frac{d\varphi}{dx}=\frac{M_T}{GI_P}\times\frac{180°}{\pi} \tag{4-12b}$$

对圆轴进行刚度计算时，要求其单位长度的最大扭转角 φ'_{max}不超过单位长度的许用扭转角 [φ']，故刚度条件为

$$\varphi'_{max}=\frac{M_T}{GI_P}\times\frac{180°}{\pi}\leqslant[\varphi'] \tag{4-13}$$

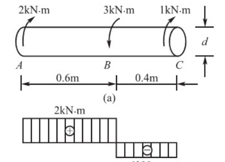


图 4.17 钢制圆轴扭转

许用扭转角 [φ'] 的数值，根据荷载性质、生产要求和不同的工作条件等因素确定。在一般情况下，对精密机械的轴，取 [φ']$=0.15°\sim0.50°$/m；一般传动轴，取 [φ']$=0.5°\sim1.0°$/m；精密度较低的轴，可取 [φ']$=1.0°\sim2.5°$/m。具体的数值可查阅有关资料和手册。

例 4.6 图 4.17(a)中钢制圆轴的直径 $d=70$mm，材料的切变模量 $G=80$GPa，单位长度圆轴的许用扭转角 [φ']$=0.8°$/m。(1)试求 A、C 两截面的相对扭转角；(2)校核此轴刚度。

解：（1）计算扭矩，画扭矩图。由截面法求得 AB、BC 两段的扭矩分别为

$$M_{T1}=2\text{kN}\cdot\text{m},\quad M_{T2}=-1\text{kN}\cdot\text{m}$$

作出扭矩图，如图 4.17(b)所示。

（2）求 A、C 两横截面的相对扭转角 φ_{AC}。两段轴扭矩不同，应分段计算 φ_{AB} 和 φ_{BC}，然后求其代数和。由式(4-11)得

$$\varphi_{AB}=\frac{M_{T1}l_1}{GI_P}=\frac{2\times10^3\times0.6\times32}{80\times10^9\times\pi\times80^4\times10^{-12}}=0.373\times10^{-2}(\text{rad})$$

$$\varphi_{BC}=\frac{M_{T2}l_2}{GI_P}=\frac{-1\times10^3\times0.4\times32}{80\times10^9\times\pi\times80^4\times10^{-12}}=-0.124\times10^{-2}(\text{rad})$$

因而有

$$\varphi_{AC}=\varphi_{AB}+\varphi_{BC}=0.373\times10^{-2}-0.124\times10^{-2}=0.249\times10^{-2}(\text{rad})$$

（3）校核刚度。AB 段扭矩 M_{T1} 大于 BC 段的扭矩 M_{T2}，因此校核 AB 段刚度。由式(4-13)得

$$\varphi'_{\max}=\varphi'_{AB}=\frac{M_{T1}}{GI_P}\times\frac{180°}{\pi}=\frac{2\times10^3\times32}{80\times10^9\times\pi\times80^4\times10^{-12}}\times\frac{180°}{\pi}=0.356(°/\text{m})<[\varphi']$$

此轴满足刚度条件。

例 4.7 某机器的传动轴如图 4.18(a)所示。已知 $[\tau]=40\text{MPa}$，$[\varphi']=0.3°/\text{m}$，$G=80\text{GPa}$，传动轴转速 $n=300\text{r/min}$，主动轮输入功率 $P_1=367\text{kW}$，三个从动轮输出功率分别为 $P_2=P_3=110\text{kW}$，$P_4=147\text{kW}$。试设计轴的直径。

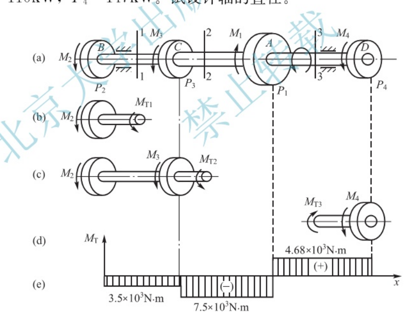


图 4.18 某机器传动轴扭转

解：（1）计算外力偶矩

$$M_1=9\ 549\frac{P_1}{n}=9\ 549\times\frac{367}{300}=11.68\times10^3(\text{N}\cdot\text{m})$$

$$M_2=M_3=9\ 549\frac{P_2}{n}=9\ 549\times\frac{110}{300}=3.50\times10^3(\text{N}\cdot\text{m})$$

$$M_4=9\ 549\frac{P_4}{n}=9\ 549\times\frac{147}{300}=4.68\times10^3(\text{N}\cdot\text{m})$$

(2) 作扭矩图。用截面法求得 BC、CA、AD 各段的扭矩分别为

$$M_{T1}=-M_2=-3.50\times10^3(\mathrm{N\cdot m})$$

$$M_{T2}=-M_2-M_3=-7.0\times10^3(\mathrm{N\cdot m})$$

$$M_{T3}=M_4=4.68\times10^3(\mathrm{N\cdot m})$$

作出扭矩图如图 4.18(e)所示。从扭矩图上可以看出，$|M_T|_{max}=7.0\times10^3\mathrm{N\cdot m}$。

(3) 确定直径 d。按强度条件式(4-9)得

$$d\geqslant\sqrt[3]{\frac{16|M_T|_{max}}{\pi[\tau]}}=\sqrt[3]{\frac{16\times7.0\times10^3}{\pi\times40\times10^6}}=0.096(\mathrm{m})=96(\mathrm{mm})$$

按照刚度条件式(4-13)得

$$d\geqslant\sqrt[4]{\frac{|M_T|_{max}\times180\times32}{G[\varphi']\pi^2}}=\sqrt[4]{\frac{7.0\times10^3\times180\times32}{80\times10^9\times0.3\times3.14^2}}=0.115(\mathrm{m})=115(\mathrm{mm})$$

为了同时满足强度和刚度要求，最后选取轴的直径 $d=115\mathrm{mm}$。

4.5 圆轴扭转时的应变能

圆轴为等直圆杆。当圆杆扭转时，杆内将储存应变能。由于杆件各截面上的扭矩可能变化，同时，横截面上各处的切应力也随该点到圆心的距离而变化，因而对于杆内应变能的计算，应先求出纯剪切应力状态下的应变能。

图 4.19 所示单元体，处于纯剪切应力状态下，设其左侧面固定，则单元体在变形后右侧面将向下移动 γdx。由于切应变 γ 很小，因此，在变形过程中，上、下两面上的外力将不做功，只有由侧面上的外力 $\tau dydz$ 对相应的位移 γdx 做功。当材料在线弹性范围内工作时，单元体上外力做功为

$$dW=\frac{1}{2}(\tau dydz)(\gamma dx)=\frac{1}{2}\tau\gamma(dxdydz)$$

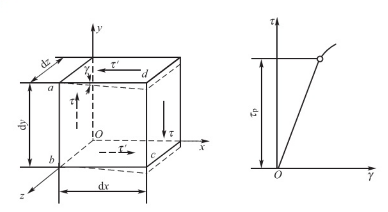


图 4.19　单元体上外力的功

由于单元体内所储存的应变能 dV_ε 数值上等于 dW，于是，可得单位体内的应变能即应变能密度 ν_ε 为

$$\nu_\varepsilon=\frac{dV_\varepsilon}{dV}=\frac{dW}{dxdydz}=\frac{1}{2}\tau\gamma \tag{4-14a}$$

由剪切胡克定律，$\tau=G\gamma$，上式又可写成

$$\nu_\varepsilon=\frac{\tau^2}{2G} \tag{4-14b}$$

或

$$\nu_\varepsilon=\frac{G\gamma^2}{2} \tag{4-14c}$$

求得纯剪切应力状态下的应变能密度 ν_ε 后，等直圆杆在扭转时储存在杆中的应变能 V_ε 即可由积分计算。

$$V_\varepsilon=\int_V v_\varepsilon \mathrm{d}V=\int_l\int_A v_\varepsilon \mathrm{d}A\mathrm{d}x \tag{4-15}$$

式中，V 为杆的体积，A 为杆的横截面面积，l 为杆长。

若等直圆杆的两端受外力偶矩 M_e 作用而发生扭转［图 4.20(a)］，则可将代入式(4-14b)，其中的切应力 $\tau_\rho=\dfrac{M_T\rho}{I_P}$。由于杆任一横截面上的扭矩 M_T 均相同，因此，杆内的应变能为

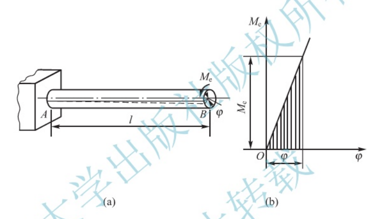


图 4.20　扭转角 φ 与外力偶矩 M_e 关系

$$V_\varepsilon=\int_l\int_A \frac{\tau^2}{2G}\mathrm{d}A\mathrm{d}x=\frac{l}{2G}\left(\frac{M_T}{I_P}\right)^2\int_A\rho^2\mathrm{d}A=\frac{M_T^2 l}{2GI_P} \tag{4-16a}$$

由于 $M_T=M_e$，上式又可写成

$$V_\varepsilon=\frac{M_e^2 l}{2GI_P} \tag{4-16b}$$

又由相对扭转角 $\varphi=\dfrac{M_T l}{GI_P}$，杆的应变能 V_ε 也可改写成用相对扭转角的表达形式

$$V_\varepsilon=\frac{GI_P}{2l}\varphi^2 \tag{4-16c}$$

以上应变能表达式也可利用外力功与应变能数值上相等的关系，直接从作用在杆端的外力偶矩 M_e 在杆发生扭转过程中所做的功 W 算得。当杆在线弹性范围内工作时，截面 B 相对于 A 的相对扭转角 φ 与外力偶矩 M_e 在加载工程中成正比，如图 4.20(b)所示，仿照轴向拉伸、压缩的应变能中所用方法，即可推导出以上应变能表达式。

4.6 圆轴扭转时的超静定问题

扭转时的超静定问题解法，和拉伸、压缩时超静定问题解法相同，同样是综合考虑几

何关系，物理关系和静力平衡方程。下面通过一个例题来说明其解法。

例 4.8 两端固定的圆截面杆 AB，在截面 C 处受到一扭转力偶矩 M_e 作用，如图 4.21(a)所示。已知杆的扭转刚度为 GI_P，试求杆两端的支反力偶矩。

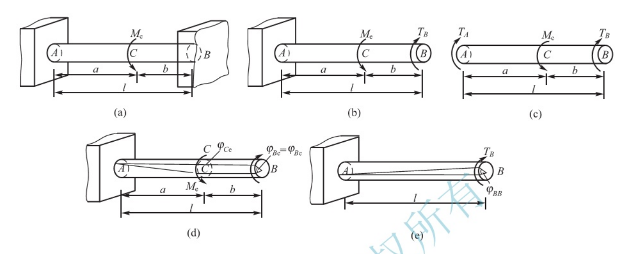


图 4.21 圆截面杆扭转

解： 有 2 个未知的支反力偶矩，而静力平衡方程只有 1 个，故为一次超静定问题。

设想固定端 B 为多余约束，解除后加上相应的多余未知力偶矩 T_B，得基本静定系，如图 4.21(b)所示。

(1) 列平衡方程。研究 AB 杆，受力分析如图 4.21(c)所示。于是平衡方程为

$$\sum M_x=0,\quad T_A+T_B-M_e=0 \tag{a}$$

(2) 变形几何关系。M_e 单独作用时在 C 处引起扭转角 φ_{Ce}，同时也使 B 端作刚性转动，其转角 $\varphi_{Be}=\varphi_{Ce}$ [图 4.21(d)]；T_B 单独作用时在 B 处引起扭转角 φ_{BB} [图 4.21(e)]。由于 B 端原来是固定端，所以其扭转角等于零，即

$$\varphi_B=\varphi_{Ce}+\varphi_{BB}=0 \tag{b}$$

其中，$\varphi_{Ce}=\dfrac{M_e a}{GI_P}$，$\varphi_{BB}=-\dfrac{T_B l}{GI_P}$。代入(b)式，得补充方程

$$\frac{M_e a}{GI_P}-\frac{T_B l}{GI_P}=0 \tag{c}$$

联立(a)、(c)得

$$T_A=\frac{M_e b}{l},\quad T_B=\frac{M_e a}{l}$$

结果为正，表明原来所设的方向是正确的。

4.7 非圆截面杆扭转的概念

以前各节讨论了圆形截面杆的扭转，但有些受扭杆件的横截面并非圆形。例如农业机械中有时采用方轴作为转动轴，又如曲轴的曲柄承受扭转，而其横截面是矩形的。

圆形截面杆扭转时的应力和变形的计算公式，是根据试验现象作了平面假设得到的，但是在研究矩形截面杆的扭转时，通过类似的试验观察到所有的横截面在扭转后不再是平

面。例如，图 4.22(a)所示的矩形截面杆，变形前在其表面刻上一系列纵向直线和横向直线，扭转变形后可以看到，所有横向直线都变为曲线 [图 4.22(b)]，这说明原来为平面的横截面，变形后成为曲面，即截面上的各点在发生横向位移的同时还发生纵向位移，而纵向位移可能引起正应力。这种现象称为翘曲，凡是非圆截面杆在扭转时都会发生翘曲。

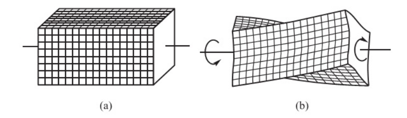


图 4.22　矩形截面杆扭转

非圆截面杆的扭转可分为自由扭转(free torsion)和约束扭转(constraint torsion)。若杆件各横截面的翘曲都相同，即杆的纵向线段虽有纵向位移但其长度无变化，因而横截面上无正应力而只有切应力。这种情况称为自由扭转，否则为约束扭转。等直杆两端无约束并受一对平衡力偶矩作用的情况就属于自由扭转。

由于矩形截面杆在扭转时横截面发生翘曲而变为曲面，而对曲面作简单的假设是困难的，因此用材料力学的方法不能解决这一问题，而必须用弹性力学的方法来解决。下面仅将矩形截面杆在自由扭转时，由弹性力学研究的主要结果简述如下。

(1) 矩形截面杆在自由扭转时，横截面上只有切应力而无正应力。

(2) 周边上各点的切应力的方向与周边平行，在对称轴上各点的切应力垂直对称轴，如图 4.23 所示。

(3) 在截面中心和四角点处，切应力为零。

(4) 最大切应力 τ_{max} 发生在截面长边的中点处。此外，短边的中点处切应力也较大，它们分别为

$$\tau_{max}=\frac{M_T}{\alpha hb^2}=\frac{M_T}{W_t} \tag{4-17}$$

$$\tau_1=\nu\tau_{max} \tag{4-18}$$

图 4.23　矩形截面杆应力

式中，$W_t=\alpha hb^2$，称为杆件的抗扭截面系数。

强度条件为

$$\tau_{max}=\frac{M_T}{\alpha hb^2}\leqslant[\sigma] \tag{4-19}$$

杆件两端相对扭转角的计算公式为

$$\varphi=\frac{M_T l}{G\beta hb^3}=\frac{M_T l}{GI_t} \tag{4-20}$$

式中，$GI_t=G\beta hb^3$，称为杆件的抗扭刚度。

单位长度扭转角为

$$\varphi'=\frac{M_T}{G\beta hb^3}=\frac{M_T}{GI_t} \tag{4-21}$$

刚度条件为

$$\varphi' \leqslant [\varphi'] \tag{4-22}$$

若采用工程单位制，则刚度条件为

$$\varphi' = \frac{180°}{\pi} \times \frac{M_T}{G\beta hb^3} \leqslant [\varphi'] \tag{4-23}$$

α、β、ν是一个与比值h/b有关的系数，已列入表4-1中。

表4-1　矩形截面杆自由扭转时的

h/b	1	1.2	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	6.0	8.0	10.0	∞
α	0.208	0.219	0.231	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	0.141	0.166	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333
ν	1.000	0.930	0.858	0.796	0.767	0.753	0.745	0.743	0.743	0.743	0.743

当$h/b>10$，截面成为狭长矩形。这时，$\alpha=\beta\approx\frac{1}{3}$。如果$\delta$表示狭长矩形的短边的长度，则式(4-17)和式(4-20)化为

$$\tau_{max} = \frac{M_T}{\frac{1}{3}h\delta^2} \tag{4-24}$$

$$\varphi = \frac{M_T l}{G\frac{1}{3}h\delta^3} \tag{4-25}$$

例4.9　一矩形截面等直钢杆，承受一对外力偶矩$M_e=4\ 000\text{N}\cdot\text{m}$作用，其横截面尺寸为$h=100\text{mm}$，$b=50\text{mm}$，长度为$l=2\text{m}$。已知材料的许用切应力$[\tau]=120\text{MPa}$，许用单位长度扭转角$[\varphi']=1°/\text{m}$，切变模量$G=80\text{GPa}$。试校核该杆的强度和刚度。

解： 由截面法求得扭矩为$M_T=M_e=4\ 000\text{N}\cdot\text{m}$。由$\frac{h}{b}=\frac{100}{50}=2$，查表4.1知：$\alpha=0.246$，$\beta=0.249$。于是由式(4-19)和式(4-23)分别求得

$$\tau_{max} = \frac{M_T}{\alpha hb^2} = \frac{4\ 000}{0.246\times0.1\times0.05^2} = 65(\text{MPa}) \leqslant [\tau]$$

$$\varphi' = \frac{180°}{\pi} \times \frac{M_T}{G\beta hb^3} = \frac{180°}{\pi} \times \frac{4\ 000}{80\times10^9\times0.249\times0.1\times0.05^3} = 0.92(°/\text{m}) \leqslant [\varphi']$$

以上结果表明，杆满足强度条件和刚度条件。

小　　结

1. 外力偶矩·扭矩及扭矩图

功率P、转速n及外力偶矩M之间的关系，当功率用千瓦(kW)作单位时，外力偶矩为$M=9\ 549\ \frac{P}{n}$；当功率用马力(PS)作单位时，则$M=7\ 024\ \frac{P}{n}$。

外力只有力偶，用一假想平面，沿此截面将杆件截开，分成两部分，为了维持平衡，分布在横截面上的内力，必然构成一个内力偶与外力偶平衡，该内力偶矩称为扭矩，用

M_T 表示。当轴上同时有几个外力偶作用时，则不同轴段上扭矩不相同。为了表示扭矩随横截面位置变化的情况，可以作出扭矩图，作扭矩图的方法与作轴力图类似。

2. 薄壁圆筒的扭转

(1) 薄壁圆筒扭转时的切应力。薄壁圆筒扭转时横截面上的切应力是均匀分布的，其方向垂直于半径。切应力的计算公式为 $\tau=\dfrac{M_T}{2\pi r^2\delta}$。

(2) 切应力互等定律。在相互垂直的两个截面上，垂直于截面交线的剪应力大小相等、方向同时指向或背离两截面的交线，这就是切应力互等定律。在单元体的四个侧面上，只有切应力而无正应力，这种情况称为纯剪切。

(3) 剪切胡克定律。当切应力不超过材料的剪切比例极限时，切应力与切应变成正比，这就是剪切胡克定律，即 $\tau=G\gamma$。

弹性常数：弹性模量 E，切变模量 G，泊松比 μ。对于各向同性材料，三个弹性常数之间关系为：$G=\dfrac{E}{2(1+\mu)}$。

3. 圆轴扭转时的切应力和强度计算

根据几何关系、物理关系、静力学关系可以推导出圆轴扭转时横截面上切应力计算公式，即 $\tau_\rho=\dfrac{M_T\rho}{I_P}$。截面上各点剪应力与该点到圆心的距离成正比。

圆轴截面边缘上的切应力为最大，最大值为 $\tau_{max}=\dfrac{M_T}{W_P}$。为了保证圆轴扭转时不会因强度不足而破坏，要求轴内的最大切应力不得超过材料的许用应力，即 $\tau_{max}\leqslant[\tau]$，这就是圆轴扭转的强度条件。利用这个条件可以解决三方面的问题。

4. 圆轴扭转时的变形和刚度计算

扭转角为 $\varphi=\dfrac{M_T l}{GI_P}$；轴的刚度条件为 $\varphi'_{max}=\dfrac{180}{\pi}\times\dfrac{M_T}{GI_P}\leqslant[\varphi'](°/\mathrm{m})$。

5. 应变能

当圆杆扭转时，杆内将储存应变能。等直圆杆扭转时，杆内的应变能为 $V_\varepsilon=\dfrac{M_e^2 l}{2GI_P}$，或 $V_\varepsilon=\dfrac{GI_P}{2l}\varphi^2$。应变能密度为 $\nu_\varepsilon=\dfrac{1}{2}\tau\gamma$，或 $\nu_\varepsilon=\dfrac{\tau^2}{2G}$，或 $\nu_\varepsilon=\dfrac{G\gamma^2}{2}$。

6. 超静定问题

扭转时的超静定问题解法，和拉伸、压缩时超静定问题解法相同，同样是综合考虑几何关系、物理关系和静力平衡方程。

7. 非圆截面杆扭转的概念

矩形截面杆在自由扭转时，由弹性力学研究的主要结果简述如下。

(1) 矩形截面杆在自由扭转时，横截面上只有切应力而无正应力。

(2) 周边上各点的切应力的方向与周边平行，在对称轴上各点的切应力垂直对称轴。

(3) 在截面中心和四角点处，切应力为零。

(4) 最大切应力 τ_{max} 发生在截面长边的中点处。此外，短边的中点处切应力也较大，它们分别为 $\tau_{max}=\dfrac{M_T}{\alpha hb^2}$ 和 $\tau_1=\nu\tau_{max}$。

(5) 杆件两端相对扭转角的计算公式为 $\varphi=\frac{M_T l}{G\beta hb^3}=\frac{M_T l}{GI_P}$。

思　考　题

4.1　两根轴的直径 d 和长度 l 相同，而材料不同，在相同的扭矩作用下，它们的最大切应力是否相同？扭转角是否相同？为什么？

4.2　用 Q235 钢制成的扭转轴，发现原设计轴的扭转角超过许用值。欲选用优质钢来降低扭转角，此方法是否有效？

4.3　一空心圆轴的外径为 D，内径为 d，它的极惯性矩 I_P 和抗扭截面系数 W_P 可否按下式计算 $\left(已知\ \alpha=\frac{d}{D}\right)$？

$$I_P=\frac{\pi D^4}{32}-\frac{\pi d^4}{32}=\frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4),\quad W_P=\frac{\pi D^3}{16}-\frac{\pi d^3}{16}=\frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^3)$$

4.4　如图 4.24 所示各杆，哪些产生纯扭转变形？

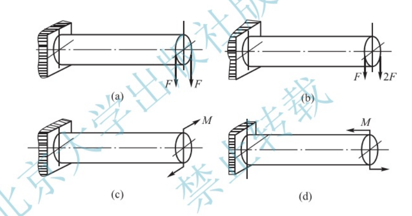


图 4.24　思考题 4.4 图

4.5　判断如图 4.25 所示的切应力分布图，其中正确的扭转切应力分布是哪个图？

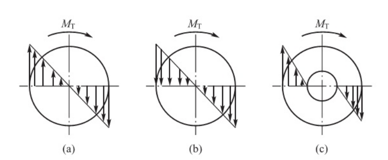


图 4.25　思考题 4.5 图

4.6　为什么同一减速器中，高速轴的直径较小，而低速轴的直径较大？

4.7　有铝和钢两根圆轴，尺寸相同，所受外力偶矩相同。钢的切变模量为 G_1，铝的切变模量为 G_2，且 $G_1=3G_2$。试分析两轴的切应力、扭转角的关系。

4.8　从力学角度解释，为什么说空心圆轴要比实心圆轴较合理？

习 题

4.1 试绘出如图4.26所示各轴的扭矩图，并求$|M_T|_{max}$。

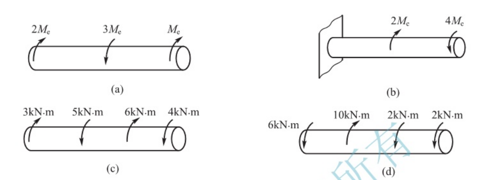


图4.26 习题4.1图

4.2 某薄壁圆筒，外直径$D=44$mm，内直径$d=40$mm，横截面上扭矩$M_T=750$N·m。试求扭转时横截面上的切应力。

4.3 圆轴的直径$d=50$mm，转速$n=120$r/min，若该轴的最大切应力为$\tau_{max}=60$MPa。求所能传递的功率是多少。

4.4 如图4.27所示受扭圆轴中，直径$d=80$mm。试求1-1截面上K点的切应力和杆中的最大切应力。

4.5 如图4.28所示受扭圆轴中，直径$d=100$mm，材料的许用切应力$[\tau]=40$MPa。试校核该轴的强度。

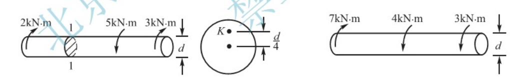


图4.27 习题4.4图　　图4.28 习题4.5图

4.6 横截面相等的两根圆轴，一根为实心，许用切应力为$[\tau]_1=80$MPa，另一根为空心，内外直径比$\alpha=0.6$，许用切应力为$[\tau]_2=50$MPa，若仅从强度条件考虑，哪一根圆轴能承受较大的扭矩？

4.7 如图4.29所示圆轴受外力作用，已知传递功率分别为$P_A=15$kW，$P_B=30$kW，$P_C=10$kW，$P_D=5$kW，转速为$n=500$r/min，许用应力为$[\tau]=40$MPa，试设计该圆轴的直径。

4.8 船用推进轴如图4.30所示，一端是实心的，其直径$d_1=28$cm；另一端是空心

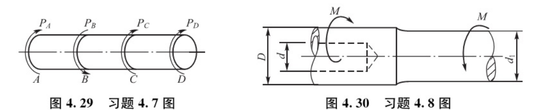


图4.29 习题4.7图　　图4.30 习题4.8图

的，其内径 $d=14.8\mathrm{cm}$，外径 $D=29.6\mathrm{cm}$，受力偶矩 $M=200\mathrm{kN\cdot m}$。若 $[\tau]=50\mathrm{MPa}$，试校核此轴的强度。

4.9　有一减速器如图 4.31 所示。已知电动机转速 $n=960\mathrm{r/min}$，功率 $P=6\mathrm{kW}$；轴材料的许用切应力 $[\tau]=40\mathrm{MPa}$。试按扭转强度计算减速器第 1 轴的直径。

4.10　汽车的转向轴如图 4.32 所示，方向盘的直径 $D_1=52\mathrm{cm}$，驾驶员每只手作用于方向盘上的最大切向力 $F_P=200\mathrm{N}$，转向轴材料的许用切应力 $[\tau]=50\mathrm{MPa}$，试设计实心转向轴的直径。若改为 $\alpha=\dfrac{d}{D}=0.8$ 的空心轴，则空心轴的内径和外径各多大？并比较两者的质量。

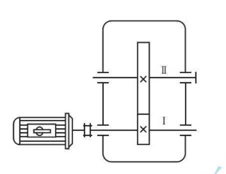


图 4.31　习题 4.9 图

图 4.32　习题 4.10 图

4.11　实心轴直径 $d=50\mathrm{mm}$，材料的许用切应力 $[\tau]=55\mathrm{MPa}$，轴的转速 $n=300\mathrm{r/min}$，试按扭转强度确定此轴所能传递的最大功率，并分析当转速升高为 $n=600\mathrm{r/min}$ 时，能传递的功率如何变化？

4.12　某空心圆轴，外直径 $D=100\mathrm{mm}$，内直径 $d=50\mathrm{mm}$，若要求轴在 2m 内的最大扭转角为 1.5°，设 $G=82\mathrm{GPa}$。求所能承受的最大扭矩是多少？并求此时横截面上最大切应力。

4.13　某空心圆轴，外直径 $D=100\mathrm{mm}$，内直径 $d=90\mathrm{mm}$，长度 $l=2\mathrm{m}$，最大切应力 $\tau_{\max}=70\mathrm{MPa}$，切变模量 $G=80\mathrm{GPa}$，受扭矩 M_T 作用。试求：(1)两端面的相对扭转角；(2)若换成实心轴，在相同应力条件下，实心轴的直径为多少。

4.14　一直径为 30mm 的实心圆轴受到扭矩 $M_T=0.25\mathrm{kN\cdot m}$ 作用后，在 2m 长度内产生 3.74°的相对扭转角。求材料的切变模量 G。

4.15　如图 4.33 所示为受扭圆轴，直径 $d=80\mathrm{mm}$，材料的切变模量 $G=80\mathrm{GPa}$。试分别求出 B、C 两截面的相对扭转角，以及 D 截面的扭转角。

4.16　如图 4.34 所示为受扭圆轴，已知材料的许用切应力 $[\tau]=40\mathrm{MPa}$，切变模量 $G=80\mathrm{GPa}$，单位长度的许用扭转角 $[\varphi']=1.2°/\mathrm{m}$。试求轴所需的直径。

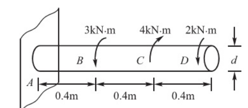


图 4.33　习题 4.15 图

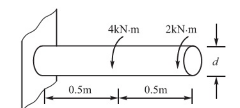


图 4.34　习题 4.16 图

4.17　如图4.35所示一等直圆轴，已知直径d=40mm，a=400mm，$\varphi_{DB}=1°$，材料的切变模量G=80GPa。试求：(1)最大切应力；(2)截面A相对于截面D的扭转角。

4.18　如图4.36所示为一等直圆轴，已知外力偶矩M_A=2.99kN·m，M_B=7.20kN·m，M_C=4.21kN·m，材料的许用切应力$[\tau]$=70MPa，许用单位长度扭转角$[\varphi']=1°/\text{m}$，材料的切变模量G=80GPa。试确定该轴的直径。

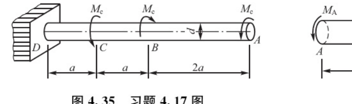


图4.35　习题4.17图

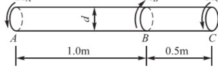


图4.36　习题4.18图

4.19　如图4.37所示为一阶梯圆轴，AE段为空心，外径D=140mm，内径d=100mm，BC段为实心，直径d=100mm，已知外力偶矩M_A=18kN·m，M_B=32kN·m，M_C=14kN·m，材料的许用切应力$[\tau]$=80MPa，许用单位长度扭转角$[\varphi']=1.2°/\text{m}$，切变模量G=80GPa。试校核该轴的强度和刚度。

4.20　一端固定的圆轴AB，承受集度为m_e的均布外力偶矩作用，如图4.38所示。已知圆轴直径为d，杆长为l，材料的切变模量为G，试求杆内积蓄的应变能。

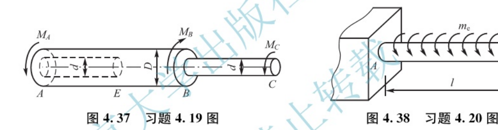


图4.37　习题4.19图　　图4.38　习题4.20图

4.21　如图4.39所示为一两端固定的阶梯状圆轴AB，在截面突变处承受外力偶矩M_e作用。若直径$d_1=2d_2$，试求固定端的支反力偶矩M_A和M_B，并作扭矩图。

4.22　如图4.40所示为一两端固定的钢圆轴AB，其直径d=60mm，在C截面处承受一外力偶矩M_e=3.8kN·m作用。已知钢的切变模量G=80GPa。试求：(1)截面C两侧横截面上的最大切应力；(2)截面C的扭转角。

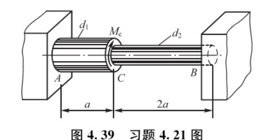


图4.39　习题4.21图

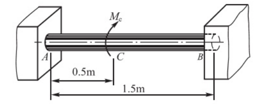


图4.40　习题4.22图

4.23　如图4.41所示矩形截面钢杆承受一对外力偶矩M_e=3kN·m作用。已知材料的切变模量G=80GPa。试求：(1)杆内最大切应力的大小和位置；(2)横截面短边中点处的切应力；(3)杆的单位长度扭转角。

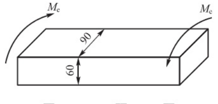


图4.41　习题4.23图

第5章
弯曲内力

教学目标

理解平面弯曲、剪力、弯矩的概念
掌握作梁的剪力图、弯矩图的截面法(即列方程法)
理解弯矩 $M(x)$、剪力 $F_S(x)$、分布荷载集度 $q(x)$之间的关系
掌握叠加法、分段叠加法作弯矩图的原理
熟练掌握控制截面法作梁的剪力图、弯矩图
了解控制截面法作平面刚架的剪力图、轴力图和弯矩图
了解曲杆内力图的作法

教学要求

知识要点	能力要求	相关知识
作梁的剪力图、弯矩图的截面法(即列方程法)	(1) 掌握作梁的剪力图、弯矩图的截面法(即列方程法)的步骤 (2) 熟练绘制剪力图、弯矩图	平面一般力系的平衡条件
弯矩 $M(x)$、剪力 $F_S(x)$、分布荷载集度 $q(x)$之间的关系	(1) 熟练掌握弯矩 $M(x)$、剪力 $F_S(x)$与分布荷载集度 $q(x)$之间的关系 (2) 掌握应用弯矩 $M(x)$、剪力 $F_S(x)$与分布荷载集度 $q(x)$之间的关系绘梁段剪力图、弯矩图。	积分的概念 求导数的概念
叠加法、分段叠加法作弯矩图	(1) 理解叠加法、分段叠加法的适用条件 (2) 熟练掌握叠加法、分段叠加法作弯矩图	叠加原理
控制截面法作梁的剪力图、弯矩图和刚架剪力图、轴力图和弯矩图	(1) 熟练掌握控制截面法作梁的剪力图、弯矩图 (2) 了解控制截面法作平面刚架的剪力图、轴力图和弯矩图	平面一般力系的平衡条件



引言

弯曲是杆件十分重要的基本变形之一，在实际中的梁、板是以弯曲变形为主的构件。在这章中，主要讨论梁在横向力作用下，剪力图、弯矩图绘制的截面法(即列方程法)、叠加法、分段叠加法和控制截

面法，重点掌握控制截面法。本章的学习非常重要，它将为后面学习梁的应力、梁的变形、组合变形以及压杆稳定的临界应力奠定基础，建议同学们注重学习和掌握基本概念和基本方法。

5.1 平面弯曲的概念及梁的计算简图

5.1.1 平面弯曲的概念

在工程中常遇到这样一类杆件，它们承受的外力(荷载和约束反力)是作用线垂直于杆轴线的平衡力系。在外力作用下，杆轴线由直线变成曲线，这种变形称为弯曲(bending)。以弯曲变形为主的杆件称为梁(beam)。梁的用途非常广泛，例如房屋建筑物中的楼层梁［图 5.1(a)］和阳台梁［图 5.1(b)］；桥式起重机的钢梁［图 5.1(c)］；公路桥的纵梁和桥面板梁［图 5.1(d)］等均为受弯杆件。拱坝的拱冠梁［图 5.1(e)］在拱坝承受水压力时，也发挥梁的作用。

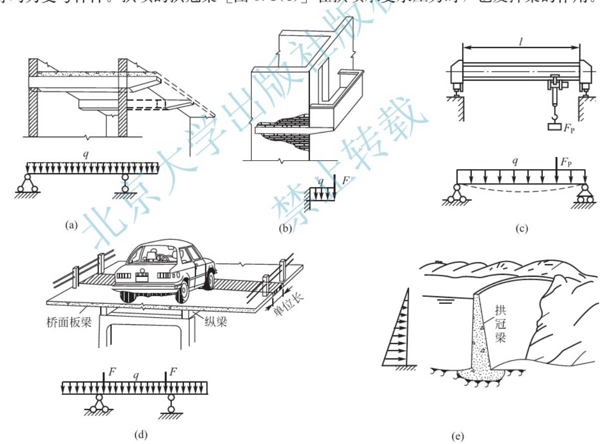


图 5.1 工程中梁的实例

工程中常见的梁多采用具有竖向对称轴的横截面，例如矩形、圆形、工字形、T 形等(图 5.2)，而外力一般作用在梁的纵向对称面内，在这种情况下，梁弯曲变形表现出以下特点：梁的轴线与外力保持在同一纵向对称面内，即梁变形后的轴线成为一条在纵向对称面内的平面曲线(图 5.3)，这类弯曲称为平面弯曲(plane bending)。本章和后两章主要研究直梁平面弯曲问题。

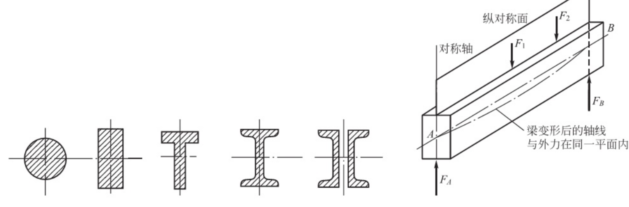


图 5.2　工程中常见梁的横截面形状　　　　图 5.3　梁的平面弯曲

5.1.2　梁的计算简图

在实际工程中，梁的截面形状和尺寸多种多样，荷载和支承情况也千变万化，要去研究每一个特定的梁是不现实的，也是没有必要的。通常把实际的梁合理地进行简化，作出梁的计算简图，按支承情况不同把单跨静定梁分为悬臂梁(cantilever beam)、简支梁(simply supported beam)和外伸梁(overhanging beam)三种基本形式，图 5.4(a)、(b)、(c)所示的梁分别为这三种梁的计算简图，它们的支座约束反力数目等于独立的平衡方程数目，仅用平衡方程就可确定其所有的支座约束反力，这种梁称为静定梁。有时为了工程上的需要，对一根梁设置较多的支座［图 5.4(d)、(e)］，因而梁的支座约束反力数目多于独立的平衡方程的数目，此时仅用平衡方程就无法确定其所有的支座约束反力，这种梁称为超静定梁。

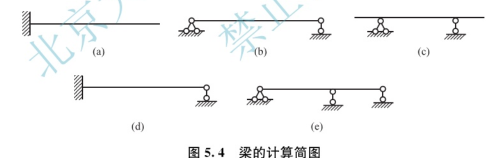


图 5.4　梁的计算简图

梁在两支座间的部分称为跨，其长度则称为梁的跨度。常见的静定梁大多是单跨的。接下来就要以计算简图为依据，进行力学计算。

5.2　梁的剪力与弯矩、剪力图与弯矩图

梁在外力作用下发生弯曲变形时，各横截面上将产生内力，确定梁的内力仍用截面法。

5.2.1　剪力与弯矩

如图 5.5(a)所示简支梁 AB 受集中力 F 的作用，欲求距 A 端 x 处 $m-m$ 横截面上的

内力。为此，先求出梁的支座反力 F_A、F_B，然后用截面法沿 $m-m$ 横截面假想地把梁截分为两部分，取左段为研究对象［图 5.5(b)］。由于整个梁处于平衡状态，左段也应保持平衡，故在 $m-m$ 横截面上必定有一个作用线与 F_A 平行而指向与 F_A 相反的切向内力 F_S 存在；同时 F_A 与 F_S 形成一力偶，其力偶矩为 $F_A x$，使左段有顺时针转动的趋势，因此在该横截面上还应有一个逆时针转向的内力偶矩 M 存在，才能使左段平衡。也就是说，在抛弃右段梁之后，右段梁对左段梁的作用，可以用截开截面上的内力 F_S 和内力偶 M 来代替，其大小由平衡方程确定。即由

图 5.5　用截面法求梁的内力

$$\sum F_y=0,\quad F_A-F_S=0$$

可得

$$F_S=F_A$$

$$\sum M_C=0,\quad M-F_A x=0$$

可得

$$M=F_A x$$

式中，F_S 称为 $m-m$ 横截面上的剪力(shear force)，它是该横截面上切向分布力的合力；M 称为 $m-m$ 横截面上的弯矩(bending moment)，它是该截面上法向分布内力的合力偶矩。这里的矩心 C 是横截面的形心。

若取右段为研究对象［图 5.5(c)］，则由右段梁上的外力所计算出的该截面剪力和弯矩，在数值上与上述结果相等，但其方向均相反。这一结果是必然的，因为它们是作用力与反作用力的关系。

为了使以左段梁或右段梁为研究对象时，求得的同一横截面 $m-m$ 上的内力不仅大小相等，而且有相同的正负号，与拉压、扭转类似，梁弯曲时也可根据变形来规定内力的正负号。在横截面 $m-m$ 处，从梁内取出长为 $\mathrm{d}x$ 的微段，并规定：在图 5.6(a)所示变形情况下，即微段有“左上右下”相对错动时，横截面 $m-m$ 上的剪力为正(即任一截面上剪力以对杆段另一端横截面形心产生顺时针力矩时为正)，反之为负(即任一截面上剪力以对杆段另一端横截面形心产生逆时针力矩时为负)［图 5.6(b)］。在图 5.6(c)所示的变形情况下，即当微段的弯曲为“下凸上凹”时，此横截面上的弯矩为正(即任一截面上弯矩以使梁段下侧纵向纤维拉长，上侧压短时为正)，反之为负(即任一截面上弯矩以使梁段上侧纵向纤维拉长，下侧压短时为负)［图 5.6(d)］。按上述符号规定，计算某截面内力时，无论保留左段或右段，所得结果的数值与符号都是一样的。

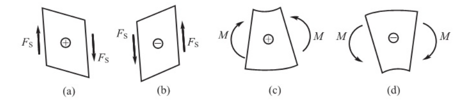


图 5.6　剪力、弯矩正负号规定

例 5.1 试求图 5.7(a)所示外伸梁指定横截面 1-1、2-2、3-3、4-4 上的剪力和弯矩。

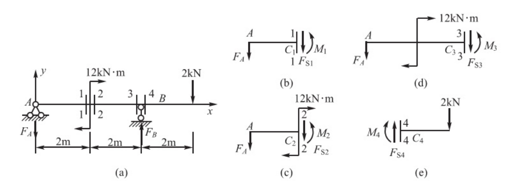


图 5.7 例 5.1 图

解：(1) 求支座反力。取整体为研究对象，由平衡方程

$$\sum M_A=0,\quad 12-F_B\times4+2\times6=0$$
$$\sum F_y=0,\quad -F_A+F_B-2=0$$

可得

$$F_A=4(\text{kN}),\quad F_B=6(\text{kN})$$

此梁在竖向荷载和集中力偶作用下，在固定铰支座 A 处所受的水平约束力显然为零。

(2) 用截面法计算梁指定截面上的内力。

① 求 1-1 截面上的内力。假想将梁沿 1-1 截面截开，取 1-1 截面左半部分为研究对象，作受力图(假设 1-1 截面上的剪力 F_{S1} 与弯矩 M_1 均为正方向)，如图 5.7(b)所示，由平衡方程

$$\sum F_y=0,\quad -F_A-F_{S1}=0$$

可得

$$F_{S1}=-F_A=-4(\text{kN})$$
$$\sum M_{C_1}=0,\quad F_A\times2+M_1=0$$

可得

$$M_1=-F_A\times2=-8(\text{kN}\cdot\text{m})$$

F_{S1} 和 M_1 均为负值，表示实际方向与假设相反。

② 求 2-2 截面上的内力。假想将梁沿 2-2 截面截开，取 2-2 截面左半部分为研究对象，作受力图(假设 2-2 截面上的剪力 F_{S2} 与弯矩 M_2 均为正方向)，如图 5.7(c)所示，由平衡方程

$$\sum F_y=0,\quad -F_A-F_{S2}=0$$

可得

$$F_{S2}=-F_A=-4(\text{kN})$$
$$\sum M_{C_2}=0,\quad F_A\times2+-12+M_2=0$$

可得

$$M_2=-F_A\times2+12=4(\text{kN}\cdot\text{m})$$

F_{S2} 为负值，表示实际方向与假设相反。M_2 为正值，表示实际方向与假设相同。

1-1 和 2-2 两个横截面分别在集中力偶作用面的左侧和右侧，将这两个截面上的内力 F_{S1} 与 F_{S2} 以及 M_1 和 M_2 分别进行比较，则发现：在集中力偶两侧的相邻横截面上，剪

力相同而弯矩发生突变，且突变量等于集中力偶的大小。

③ 求 3－3 截面上的内力。假想将梁沿 3－3 截面截开，取 3－3 截面左半部分为研究对象，作受力图(假设 3－3 截面上的剪力 F_{S3} 与弯矩 M_3 均为正方向)，如图 5.7(d)所示，由平衡方程，

$$\sum F_y=0,\quad -F_A-F_{S3}=0$$

可得

$$F_{S3}=-F_A=-4(\text{kN})$$

$$\sum M_{C_3}=0,\quad F_A\times 4+M_3-12=0$$

可得

$$M_3=12-F_A\times 4=-4(\text{kN}\cdot\text{m})$$

F_{S3} 和 M_3 均为负值，表示实际方向与假设相反。

④ 求 4－4 截面上的内力。假想将梁沿 4－4 截面截开，取 4－4 截面右半部分为研究对象，作受力图(假设 4－4 截面上的剪力 F_{S4} 与弯矩 M_4 均为正方向)，如图 5.7(e)所示，由平衡方程，

$$\sum F_y=0,\quad F_{S4}-2=0$$

可得

$$F_{S4}=2(\text{kN})$$

$$\sum M_{C_4}=0,\quad M_4+2\times 2=0$$

可得

$$M_4=-4(\text{kN}\cdot\text{m})$$

F_{S4} 为正值，表示实际方向与假设相同。M_4 为负值，表示实际方向与假设相反。

3－3 和 4－4 两个横截面分别在集中力作用面的左侧和右侧，将这两个截面上的内力 F_{S3} 与 F_{S4} 和 M_3 与 M_4 分别进行比较，则发现：在集中力两侧的相邻横截面上，弯矩相同而剪力发生突变，且突变量等于集中力的大小。

通过上面的计算和进一步平衡分析，可以得出以下内力计算规则：

(1) 某横截面上的剪力 F_S 等于作用在该横截面任一侧(左侧或右侧)梁上所有外力在该横截面及其延展面上的投影代数和。对该横截面形心产生顺时针力矩的外力，在该横截面及其延展面上的投影取正，反之取负。

(2) 某横截面上的弯矩 M 等于作用在该横截面任一侧(左侧或右侧)梁上所有外力对该横截面形心的力矩代数和。外力对该横截面形心产生的力矩使该横截面下侧纵向纤维拉长时取正，反之取负。据此规则，在实际计算中可不必将梁假想地截开，取研究对象，而直接从横截面的任意一侧梁上的外力来求该横截面上的剪力和弯矩。

5.2.2 剪力方程与弯矩方程和剪力图与弯矩图

梁横截面上的剪力和弯矩一般是随横截面位置而变化的，为了描述其变化规律，可以用坐标 x 表示横截面沿梁轴线变化的位置，则梁各横截面上的剪力和弯矩可以表示为 x 坐标的函数，即

$$F_S=F_S(x),\quad M=M(x)$$

这两个函数表达式分别称为梁的剪力方程和弯矩方程(shear-force & bending-moment equations)。

根据剪力和弯矩方程，以平行于梁轴线的横坐标 x 表示横截面的位置，以纵坐标表示各对应横截面上的剪力值和弯矩值，画出 $F_S=F_S(x)$，$M=M(x)$关系曲线，这样的图线称为梁的剪力图和弯矩图(shear-force&bending-moment diagrams)。在画梁的剪力图和弯矩图时特别要注意：画剪力图时，对于所有专业，正剪力都画在杆轴线上方，负剪力都画在杆轴线下方。画弯矩图时，对于土建类专业，正弯矩都画在杆轴线下方，负弯矩都画在杆轴线上方；但对于机械类专业，正弯矩都画在杆轴线上方，负弯矩都画在杆轴线下方。所有专业，作剪力图、弯矩图时，都不要在剪力、弯矩值前加"＋"、"－"号，剪力、弯矩"＋"、"－"号一律标于图中圆圈内。本书以土建类专业的规定来作梁的弯矩图，机械类专业只须把弯矩图上下倒转即可。

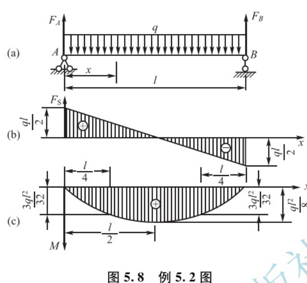


图 5.8　例 5.2 图

例 5.2　图 5.8(a)所示为一简支梁，在全梁上受集度为 q 的均布荷载作用。试作此梁的剪力图和弯矩图。

解：(1) 求支座反力。由对称性可知梁的两个支座反力相等

$$F_A=F_B=\frac{1}{2}ql$$

(2) 列剪力方程和弯矩方程。取 A 为原点，在距 A 点 x 处取一横截面，根据该截面左侧梁上的外力直接计算该截面的剪力和弯矩，即可得梁的剪力方程和弯矩方程

$$F_S(x)=F_A-qx=\frac{1}{2}ql-qx \quad (0<x<l) \tag{5-1}$$

$$M(x)=F_Ax-qx\cdot\frac{x}{2}=\frac{1}{2}ql-\frac{1}{2}qx^2 \quad (0\leqslant x\leqslant l) \tag{5-2}$$

(3) 作剪力图和弯矩图。由式(5-1)可知剪力是 x 的线性函数，因而剪力图为一斜直线，只需确定其上两点，如 $x=0$ 处，$F_S=\frac{1}{2}ql$，$x=l$ 处，$F_S=-\frac{1}{2}ql$，便可绘出剪力图[图 5.8(b)]。

由式(5-2)可知弯矩是 x 的二次函数，弯矩图为二次抛物线，要绘出此曲线至少需确定曲线上的三点。在 $x=0$ 和 $x=l$ 处，$M=0$；在 $x=\frac{l}{2}$，$M=\frac{1}{8}ql^2$。由此可绘出弯矩图[图 5.8(c)]。

由剪力图和弯矩图可见，在两支座内侧横截面上剪力的绝对值最大，其值为$|F_S|_{max}=\frac{1}{2}ql$；在梁的中点横截面上，剪力 $F_S=0$，弯矩值最大，其值为$|M|_{max}=\frac{1}{8}ql^2$。

例 5.3　图 5.9(a)所示为一简支梁，在 C 点处受集中力 F 作用。作此梁的剪力图和弯矩图。

解：(1) 求支座反力。以整个梁为研究对象，由平衡方程求得

$$F_A=\frac{Fb}{l},\quad F_B=\frac{Fa}{l}$$

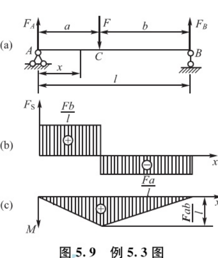


图 5.9 例 5.3 图

(2) 列剪力方程和弯矩方程。由于在 C 处有集中力 F 作用，将梁分为 AC 和 CB 两段，两段梁的剪力方程和弯矩方程不同，需分段写出。

AC 段。在 AC 段任取一横截面，假设该横截面距 A 端距离为 x，根据该横截面左侧上梁的外力，由内力计算规则可列出该横截面的剪力方程和弯矩方程

$$F_{S1}=F_A=\frac{Fb}{l}\quad(0<x<a)\tag{5-3}$$

$$M_1=F_Ax=\frac{Fb}{l}x\quad(0\leqslant x\leqslant a)\tag{5-4}$$

CB 段。在 CB 段任取一横截面，仍假设该横截面距 A 端距离为 x，根据该横截面右侧上梁的外力，由内力计算规则可列出该横截面的剪力方程和弯矩方程

$$F_{S2}=-F_B=-\frac{Fa}{l}\quad(a<x<l)\tag{5-5}$$

$$M_2=F_B(l-x)=\frac{Fa}{l}(l-x)\quad(a\leqslant x\leqslant l)\tag{5-6}$$

(3) 作剪力图和弯矩图。由式(5-3)、式(5-5)可知，AC 和 CB 两段梁的剪力图均为一水平直线；由式(5-4)、式(5-6)可知，这两段梁的弯矩图各是一条倾斜直线。根据这些方程，作出全梁的剪力图和弯矩图，如图 5.9(b)、(c)所示。从图中可见，在集中力两侧的相邻横截面上，弯矩图线只发生转折，而剪力图发生突变，且突变量等于集中力的大小。

由图 5.9 可见，在 $a\leqslant b$ 的情况下，在 AC 段剪力的绝对值最大，其值为 $|F_S|_{\max}=\frac{Fb}{l}$；而在集中力作用处的横截面上弯矩最大，其值为 $M_{\max}=\frac{Fab}{l}$。若集中力 F 作用于梁的中点，即 $a=b=\frac{l}{2}$时，则 $F_{S\max}=\frac{F}{2}$，$M_{\max}=\frac{Fl}{4}$。

例 5.4 图 5.10(a)所示为一简支梁，在 C 点处受一集中力偶 M_e 作用，作此梁的剪力图和弯矩图。

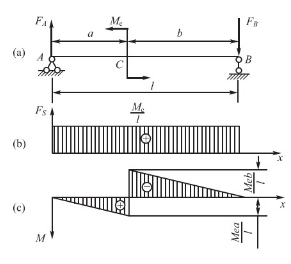


图 5.10 例 5.4 图

解：(1) 求支座反力。以整体为研究对象，由平衡方程求得

$$F_A=F_B=\frac{M_e}{l}$$

方向如图 5.10(a)所示。

(2) 列剪力方程和弯矩方程。由于 C 处有集中力偶 M_e 作用，应将梁分为 AC 和 CB 两段，分别在两段内取截面，根据截面左侧梁上的外力列出剪力方程和弯矩方程

AC 段。

$$F_{S1}=F_A=\frac{M_e}{l}\quad(0<x\leqslant a)\tag{5-7}$$

$$M_1 = F_A x = \frac{M_e}{l} x \quad (0 \leqslant x < a) \tag{5-8}$$

CB 段。

$$F_{S2} = F_A = \frac{M_e}{l} \quad (a \leqslant x < l) \tag{5-9}$$

$$M_2 = F_A x - M_e = \frac{M_e}{l} x - M_e \quad (a < x \leqslant l) \tag{5-10}$$

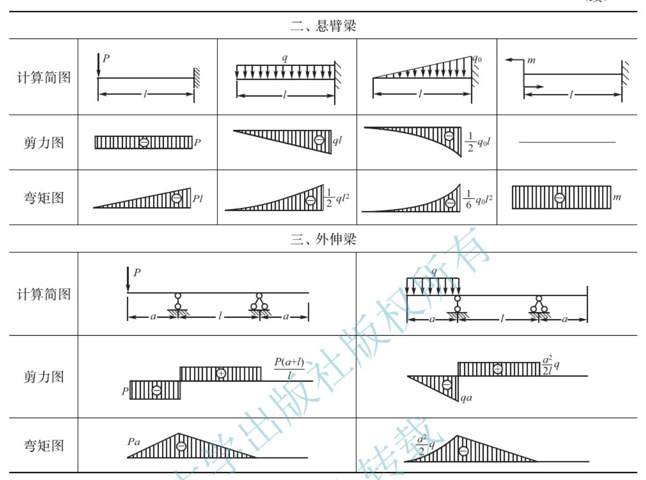
（3）作剪力图和弯矩图。由式(5－7)、式(5－9)可知，AC 段和 CB 段各横截面上的剪力相同，两段的剪力图为同一水平线；由式(5－8)、式(5－10)可知，两段梁的弯矩图为倾斜直线。作出梁的剪力图和弯矩图，如图 5.10(b)、(c)所示。从图中可见，在集中力偶两侧的相邻横截面上，剪力图线既无突变也无转折，而弯矩图发生突变，且突变量等于集中力偶的大小。全梁横截面上的剪力均为$\frac{M_e}{l}$；在 $a<b$ 的情况下，绝对值最大的弯矩在 C 点稍右的截面上，其值为$|M|_{max}=\frac{M_e b}{l}$。

简支梁、悬臂梁和外伸梁在常见荷载作用下的剪力图和弯矩图的形状、最大剪力值、最大弯矩值及其正负号等均应熟记，这是即将学习的“按叠加原理作梁的弯矩图”的基础，也是今后学习结构力学课程的基础。为了便于读者复习、记忆和查阅，现将常见的十二个简单静定梁的荷载及内力图列于表 5－1。

表 5－1　常见的静定梁内力图

一、简支梁			
计算简图	q；l	q_0；l	P；a，b；l
剪力图	$ql/2$ ⊕；$\frac{1}{2}l$；⊖ $ql/2$	$q_0l/6$ ⊕；$\frac{1}{\sqrt{3}}l$；⊖ $q_0l/3$	$\frac{b}{l}P$ ⊕；⊖ $\frac{a}{l}P$
弯矩图	⊕ $\frac{1}{8}ql^2$	⊕ $\frac{1}{9\sqrt{3}}q_0l^2$	⊕ $\frac{ab}{l}P$
计算简图	P；$l/2$，$l/2$	a，b；m；l	m；l
剪力图	$\frac{P}{2}$ ⊕；⊖ $\frac{P}{2}$	⊖ m/l	m/l ⊖
弯矩图	⊕ $\frac{1}{4}Pl$	⊖ $\frac{a}{l}m$；⊕ $\frac{b}{l}m$	m ⊕

（续）



5.3 剪力 $F_S(x)$、弯矩 $M(x)$ 与荷载集度 $q(x)$ 间的关系及其应用

设一梁上作用有任意的分布荷载，其集度为 $q(x)$，它是 x 的连续函数，并规定以向上为正。取梁的左端横截面形心 O 为坐标系原点［图 5.11(a))］，用坐标为 x 的 $m-m$ 横截面和坐常见的静定梁内力图标为 $x+dx$ 的 $n-n$ 横截面假想地截取一长为 dx 的微段。因 dx 非常小，可忽略荷载集度沿 dx 长度的变化而视为均匀分布的，设截面 $m-m$ 上产生了正向内力分别为 $F_S(x)$ 和 $M(x)$，截面 $n-n$ 上的正向内力分别为 $F_S(x)+dF_S(x)$ 和 $M(x)+dM(x)$，则微段受力情况如图 5.11(b)所示。

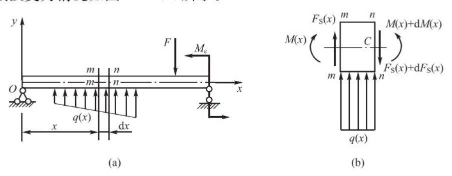


图 5.11 剪力、弯矩与分布荷载集度间的微分关系

由平衡方程

$$\sum F_y=0,\quad F_S(x)+q(x)\mathrm{d}x-[F_S(x)+\mathrm{d}F_S(x)]=0$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}F_S(x)}{\mathrm{d}x}=q(x) \tag{5-11}$$

即剪力对 x 的一阶导数等于梁上相应位置处分布荷载的集度。式(5-11)也表明剪力图在 x 截面处切线的斜率等于分布荷载在 x 截面的集度。

由平衡方程

$$\sum M_C=0,\quad -M(x)-q(x)\mathrm{d}x\times\frac{\mathrm{d}x}{2}-F_S(x)\mathrm{d}x+[M(x)+\mathrm{d}M(x)]=0$$

略去二阶微量 $q(x)\mathrm{d}x\,\dfrac{\mathrm{d}x}{2}$，可得

$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=F_S(x) \tag{5-12}$$

即弯矩对 x 的一阶导数等于梁上相应截面上的剪力。上式也表明弯矩图在 x 截面处切线的斜率等于 x 截面的剪力。

由式(5-11)和式(5-12)又可得到

$$\frac{\mathrm{d}^2M(x)}{\mathrm{d}x^2}=q(x) \tag{5-13}$$

即弯矩对 x 的二阶导数等于梁上相应相应位置处分布荷载的集度。

式(5-11)、式(5-12)、式(5-13)分别表示梁在同一截面处的荷载集度 $q(x)$、剪力 $F_S(x)$和弯矩 $M(x)$间的微分关系。应用上面的微分关系，就能根据梁上荷载情况，来分析和判断剪力图和弯矩图的图形特征。

对于无横向荷载作用的杆段，$q(x)=0$，因而

$$F_S(x)=\int\mathrm{d}F_S(x)=\int q(x)\mathrm{d}x=\int 0\mathrm{d}x=C$$

$$M(x)=\int\mathrm{d}M(x)=\int F_S(x)\mathrm{d}x=\int\left[\int q(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x=\int\left[\int 0\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x=\int C\mathrm{d}x=Cx+D$$

即杆段上剪力图为与杆轴线平行的直线，弯矩图为斜率为 C 的直线。

对于均匀分布横向荷载作用的杆段，$q(x)=C$，因而

$$F_S(x)=\int\mathrm{d}F_S=\int q(x)\mathrm{d}x=\int C\mathrm{d}x=Cx+D$$

$$M(x)=\int\mathrm{d}M(x)=\int F_S(x)\mathrm{d}x=\int\left[\int q(x)dx\right]\mathrm{d}x=\int(Cx+D)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}Cx^2+Dx+E$$

即杆段上剪力图为斜率为 C 的直线，弯矩图为二次抛物线。对于土建类专业，由于规定正弯矩画在杆轴线下方，则均匀分布横向荷载作用的杆段，弯矩图为与杆轴线变形方向一致的二次抛物线；而对于机械类专业，由于规定正弯矩画在杆轴线上方，则均匀分布横向荷载作用的杆段，弯矩图为与杆轴线变形方向相反的二次抛物线。

5.4 作梁弯矩图的叠加法和分段叠加法

1. 按叠加原理作梁的弯矩图

当梁在荷载作用下的变形很小时，其跨度的改变可以忽略不计。因而在求梁的支座反

力、剪力和弯矩时，均可按变形前的原始尺寸来计算，且所得的结果均与梁上的荷载成线性关系。例如图 5.12(a)所示悬臂梁受集中荷载 F 和均布荷载 q 共同作用，距左端为 x 的任意横截面上的弯矩为

$$M(x)=Fx-\frac{q}{2}x^2$$

式中第一项为集中荷载 F 单独作用时所引起的弯矩；第二项为分布荷载 q 单独作用时所引起的弯矩。

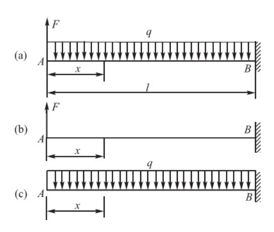


图 5.12 悬臂梁受集中荷载和均布荷载共同作用

由此可知：梁在几个荷载共同作用下的弯矩值，等于各荷载单独作用时弯矩的代数和。

实际上这里应用了具有普遍意义的叠加原理(superposition principle)，即当所求某量(内力、应力或位移)与梁上荷载为线性关系时，由多个荷载共同作用时引起的某量(内力、应力或位移)，就等于每个荷载单独作用时所引起的该量(内力、应力或位移)叠加。叠加原理应用范围是材料在线弹性范围工作。

由于弯矩可以叠加，故表达弯矩沿梁长度变化情况的弯矩图也可以按叠加原理作图，即可先分别作出各荷载单独作用下梁的弯矩图，然后将其相应的纵坐标叠加，即得梁在所有荷载共同作用下的弯矩图。当单跨梁上荷载不多时，用叠加法作弯矩图或求应力、位移既清楚又方便。

例 5.5 试按叠加原理作图 5.13(a)所示简支梁的弯矩图。

解：分别作出梁在只有集中力偶 M_{e1} ［图 5.13(b)］、M_{e2} ［图 5.13(d)］ 和均匀分布荷载 q ［图 5.15(f)］ 单独作用下的弯矩图，如图 5.13(c)、(e)、(g)所示。然后把三个图相叠加，即得三个荷载共同作用下的 M 图，如图 5.13(h)所示。

注意，叠加法作弯矩图是将各个荷载单独作用下的弯矩图中对应截面的弯矩纵标代数相加，而不是弯矩图的简单拼合。

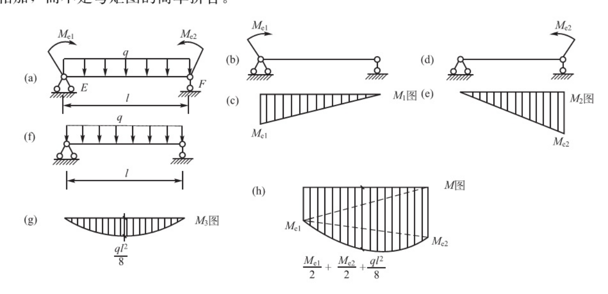


图 5.13 例 5.5 图

2. 分段叠加法作均布荷载作用下梁段的弯矩图

由上例叠加过程和结果可以看出，若把5.13(a)所示简支梁看成结构上(包括梁)上一个受弯杆段，M_{c1}、M_{c2}看成杆段两端弯矩，支座反力看成杆段两端剪力，均布荷载为作用在杆段上的荷载，仍为一平面一般平衡力系，则不难引申出结构上(包括梁)上任一段均布荷载作用下的受弯杆段弯矩图的叠加画法(分段叠加法)：由内力计算规则求出受弯杆段两端弯矩，把两端弯矩纵标连虚线，在虚线基础上叠加同跨度简支梁在均布荷载作用下的弯矩图，梁段中央在虚线基础上叠加弯矩值$\frac{ql^2}{8}$。土建类专业，要求均布荷载作用下杆段二次抛物线形的弯矩图凸出的方向与杆段变形一致；而机械类专业，则要求均布荷载作用下杆段二次抛物线形的弯矩图凸出的方向与杆段变形相反；本书以土建类专业的规定来作梁的弯矩图。

5.5 作梁剪力图与弯矩图的控制截面法(简易法)

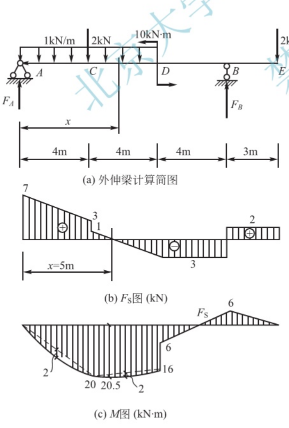
利用剪力、弯矩和分布荷载集度间的关系，可以不必再列出梁的剪力方程和弯矩方程，而用控制截面法能更加简捷地画出梁的剪力图和弯矩图。控制截面法作梁的剪力图和弯矩图的步骤如下：

(1) 取分离体，求支座反力(悬臂梁可不求)。

(2) 用内力计算规则求各控制截面剪力、弯矩值。所谓控制截面为集中力、集中力偶作用点的左右两侧截面，分布力、分布力偶的起点和终点位置的截面。

(3) 利用剪力$F_S(x)$、弯矩$M(x)$和分布荷载集度$q(x)$间的关系及分段叠加法作梁剪力图和弯矩图。

下面通过一个例题说明用控制截面法作梁的剪力图和弯矩图。



(a) 外伸梁计算简图

(b) F_S图 (kN)

(c) M图 (kN·m)

图 5.14　例 5.6 图

例 5.6　用控制截面法作出图5.14(a)所示外伸梁的剪力图和弯矩图。

解：(1) 求支座反力。取梁整体为研究对象，由平衡方程

$$\sum M_B=0,$$

$$F_A\times 12-1\times 8\times 8-2\times 8-10+2\times 3=0$$

得
$$F_A=7\text{kN}$$

$$\sum F_y=0,\quad F_A-1\times 8-2+F_B-2=0$$

得
$$F_B=5\text{kN}$$

(2) 计算各控制截面的内力值。

由于梁仅承受竖向外力及外力偶作用，故所有截面上都不存在轴力。选择各杆段

的两端截面为控制截面，由内力计算规则求各控制截面内力值。

剪力 F_S 值：

AC 段：$F_{SA右}=F_A=7\text{kN}$，$F_{SC左}=F_A-1\times4=3\text{kN}$；

CD 段：$F_{SC右}=F_A-1\times4-2=1\text{kN}$，$F_{SD左}=F_A-1\times8-2=-3\text{kN}$；

DB 段：$F_{SD右}=F_A-1\times8-2=-3\text{kN}$，$F_{SB左}=F_A-1\times8-2=-3\text{kN}$；

BE 段：$F_{SB右}=F_A-1\times8-2+F_B=2\text{kN}$，$F_{SE左}=F_A-1\times8-2+F_B=2\text{kN}$。

弯矩 M 值：

AC 段：$M_{A右}=F_A\times0=0$，$M_{C左}=F_A\times4-1\times4\times2=20\text{kN}\cdot\text{m}$；

CD 段：$M_{C右}=F_A\times4-1\times4\times2=20\text{kN}\cdot\text{m}$；

$M_{D左}=F_A\times8-1\times8\times4-2\times4=16\text{kN}\cdot\text{m}$；

DB 段：$M_{D右}=F_A\times8-1\times8\times4-2\times4-10=6\text{kN}\cdot\text{m}$；

$M_{B左}=F_A\times12-1\times8\times8-2\times8-10=-6\text{kN}\cdot\text{m}$；

BE 段：$M_{B右}=F_A\times12-1\times8\times8-2\times8-10+F_B\times0=-6\text{kN}\cdot\text{m}$，

$M_{E左}=F_A\times15-1\times8\times11-2\times11-10+F_B\times3=0$。

实际上，任一截面的内力，既可以把截面左侧外力应用内力计算规则来计算，也可以把截面右侧外力应用内力计算规则来计算，所得到的内力值是相同的。本例题是从左侧外力应用内力计算规则来计算各控制截面内力值的。从计算结果还可看出：无集中力作用处，左、右侧两截面剪力值相同，无集中力偶作用处，左、右两侧截面弯矩值相同。

(3) 作内力图。

剪力图只需分两步作出。第一步：将各控制截面剪力值用垂直于杆轴线的纵标线表示，表示正剪力值的纵标线画在杆轴线上方，表示负剪力值的纵标线画在杆轴线下方。第二步：由各杆段剪力 $F_S(x)$ 与分布荷载集度 $q(x)$ 间的关系作各杆段剪力图。对于无荷载或有均布荷载的杆段，剪力图均为直线，只须将杆段两端纵标线之间分别连直线，然后把各控制截面剪力值标于对应位置，并在图中标明“+”、“−”号，即得全梁剪力图，如图 [5.14(b)] 所示。

弯矩图需分两步作出。第一步：将各控制截面弯矩值用垂直于杆轴线的纵标线表示，表示正弯矩值的纵标线画在杆轴线下方，表示负弯矩值的纵标线画在杆轴线上方。第二步：由各杆段弯矩 $M(x)$ 与分布荷载集度 $q(x)$ 间的关系作各杆段弯矩图。对于无荷载的杆段，弯矩图为直线，只须将杆段两端纵标线之间分别连实直线，对于均布荷载的杆段，弯矩图为二次抛物线，可先将杆段两端纵标线之间分别连虚直线，然后以虚直线为基线，叠加跨度等于杆段长度的简支梁在均布荷载作用的弯矩，杆段中央在虚线基础上叠加弯矩值 $\frac{ql^2}{8}$(注意：叠加是纵标值的相加，因此叠加值必须垂直于杆轴线方向画出，而不是垂直于虚线)。然后把各控制截面弯矩值标于对应位置，并在图中标明“+”、“−”号，即得全梁弯矩图，如图 [5.14(c)] 所示。

(4) 求出均布荷载作用的杆段极值弯矩。

对于均布荷载作用的杆段，极值弯矩必须求出并标出，因为它是杆段设计的重要依据。由 $\frac{\text{d}M(x)}{\text{d}x}=F_S(x)$ 可知，在 $F_S(x)=0$ 的截面有极值弯矩。由剪力图的几何关系，可得产生极值弯矩的截面位置，再由内力计算规则算出均布荷载作用的杆段极值弯矩 $M_{\max}^{+}$ 或

M_{max}^{-}，并标于图中。本题均布荷载作用的杆段 $F_S(x)=0$ 的截面 $x=5$m，该截面极值弯矩 M_{max}^{+}可由内力计算规则算出，$M_{max}^{+}=F_A\times5-1\times5\times\frac{5}{2}-2\times1=20.5(\text{kN}\cdot\text{m})$。在弯矩图上标出如图［5.14(c)］所示。

(5) 作校核。

对梁的内力图进行下述三点校核是很必要的，一般来说这样校核基本上能保证内力图的正确。

① 用另一个平衡方程校核支座反力，这一点要在求出支座反力后及时进行；

② 在各区段上用 $F_S(x)$、$M(x)$和 $q(x)$间的关系检查图线的性质；

③ 在各集中力和集中力偶处检查内力值的突变情况。

5.6 平面刚架、斜梁和曲杆的内力图

刚架(也称框架)是由梁和柱组成的杆件结构，它的重要特点是具有刚结点(全部或部分)。如果刚架所有杆件的轴线都在同一个平面内，且荷载也作用于该平面内，这样的刚架称为平面刚架。平面刚架各杆的内力，除了剪力和弯矩外，还有轴力。刚架轴力计算规则为：某横截面上的轴力 F_N 等于作用在该横截面任一侧(左侧或右侧)梁上所有外力在该横截面法线上的投影代数和。当外力箭头离开该横截面时，该外力在该横截面法线上的投影取正，反之取负。刚架剪力、弯矩计算规则与前述相同。习惯上按下列约定：

(1) 刚架的弯矩图画在各杆纵向纤维的受拉一侧，不注明正、负号。

(2) 刚架的剪力图及轴力图可画在刚架杆轴线的任一侧(通常正值画在刚架的外侧)，须注明正、负号。

(3) 斜梁、曲杆横截面上的内力情况及其内力图的绘制方法，与刚架的相类似。

例 5.7 图 5.15(a)所示为下端固定的刚架，在其轴线平面内受集中荷载 F_1 和 F_2 作用。试绘制刚架的内力图。

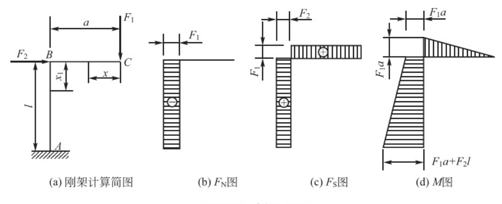


图 5.15 例 5.7 图

解： 计算内力时，一般应先求刚架的反力。本题中刚架的 C 点为自由端。若取包含自由端部分为研究对象［图 5.15(a)］，就可不求支反力。下面分别列出各段杆内力方程为

CB 段：

$$F_N(x)=0$$

$$F_S(x)=F_1$$
$$M(x)=-F_1x \quad (0\leqslant x\leqslant a)$$

BA 段：

$$F_N(x_1)=-F_1$$
$$F_S(x_1)=F_2$$
$$M(x_1)=-F_1a-F_2x_1 \quad (0\leqslant x_1\leqslant l)$$

根据各段杆的内力方程，即可绘出轴力、剪力和弯矩图，分别如图 5.15(b)、(c)、(d)所示。

例 5.8 简支斜梁 AB 轴线倾角为 α，水平方向直线跨度为 l，受均布荷载 q 作用，见图 5.16(a)。试绘制该斜梁内力图。

解：(1) 选坐标系，计算支座反力。将坐标原点选在梁左端 A 支座上，x 轴线水平向右为正方向。分析斜梁整体平衡：

$$\text{由}\sum F_x=0 \quad \text{得} \quad X_A=0 \tag{5-14}$$

$$\text{由}\sum M_B=0 \quad \text{得} \quad Y_Al-ql\frac{l}{2}=0$$

$$Y_A=\frac{1}{2}ql \tag{5-15}$$

$$\text{由}\sum F_y=0 \quad \text{得} \quad Y_B+Y_A-ql=0$$

$$Y_B=ql-Y_A=\frac{1}{2}ql \tag{5-16}$$

从式(5-14)、式(5-15)、式(5-16)可知，当简支斜梁与简支水平梁的荷载和跨度相同时，梁的支座反力也相同。

(2) 列内力方程取 x 段为研究对象，其垂直梁轴线方向的外力有 $qx\cos\alpha$ 和 $Y_A\cos\alpha$，沿梁轴线方向的外力有 $qx\sin\alpha$ 和 $Y_A\sin\alpha$，故由剪力、轴力和弯矩计算规则可列出该截面的内力方程：

$$F_S(x)=Y_A\cos\alpha-qx\cos\alpha=\frac{1}{2}ql\cos\alpha-qx\cos\alpha$$
$$=\left(\frac{1}{2}ql-qx\right)\cos\alpha \tag{5-17}$$

$$F_N(x)=-Y_A\sin\alpha+qx\sin\alpha=-\frac{1}{2}ql\sin\alpha+qx\sin\alpha$$
$$=-\left(\frac{1}{2}ql-qx\right)\sin\alpha \tag{5-18}$$

$$M(x)=Y_Ax-\frac{1}{2}qx^2=\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2 \tag{5-19}$$

(3) 绘制内力图。以平行斜梁轴线的直线为横坐标，以与横坐标垂直的坐标轴为内力坐标绘制内力图。其中剪力图和轴力图应注明正负号，弯矩图则绘于斜梁受拉纤维的一侧，见图 5.16(b)、(c)、(d)。

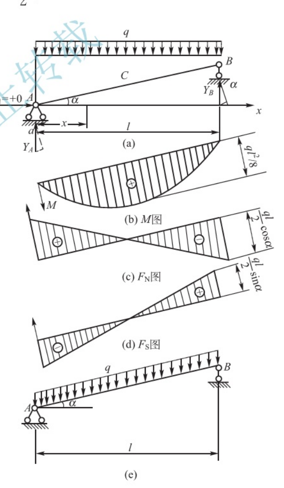


图 5.16 例 5.8 图

本例题斜梁上的分布荷载集度 q 沿水平方向计算。但有时均布荷载集度 q' 沿斜杆轴线方向计算。例如斜杆自重产生的荷载等，见图 5.16(e)。为使这种荷载作用下的斜杆的内力计算仍能直接利用式(5.17)、式(5.18)、式(5.19)进行计算，可根据作用在杆上的荷载值不变的原则，将沿杆轴线均匀分布的荷载集度 q'，转化为沿水平方向均布的荷载集度 q，使 $q'l'=ql$。式中 l' 为斜杆轴线长度，l 为斜杆轴线的水平投影长度。故

$$q=\frac{l'}{l}q'=q'/\cos\alpha$$

图 5.16(e)所示斜杆荷载如此转化后，就可用图 5.16(a)作为计算简图，进行内力计算。

例 5.9 作图 5.17 所示曲杆的内力图。

解： 本例题曲杆所受的外力虽是一不变的铅垂方向的集中力 F，但曲杆 AB 各横截面的方位均随 θ 值而变化，故以极坐标表示其内力方程。即

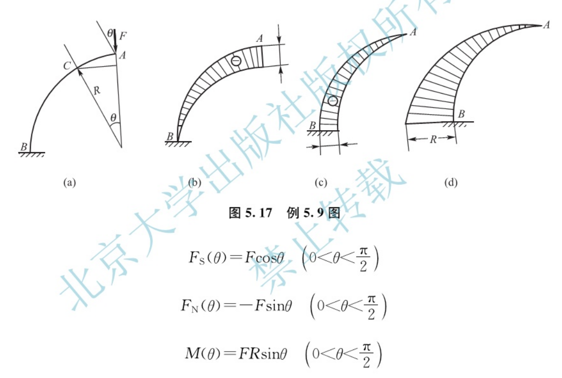


图 5.17　例 5.9 图

$$F_S(\theta)=F\cos\theta \quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$F_N(\theta)=-F\sin\theta \quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$M(\theta)=FR\sin\theta \quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

作三个曲杆轴线图，以此图为基线，将各 θ 值所对应的剪力、轴力和弯矩值标在与横截面相应的半径线上，连接这些点，作出光滑曲线，即为该曲杆的内力图。剪力图和轴力图要注明正负号，弯矩图不注正负号，画在曲杆的受拉侧。

小　　结

本章将讨论材料力学中构件受力后的另一种基本变形，即弯曲变形。当作用于杆件上的外力垂直于杆件的轴线，使原来的轴线变为曲线，这种形式的变形称为弯曲变形，以弯曲变形为主的杆件习惯上称为梁。在本章的学习中要求熟练掌握建立剪力、弯矩方程和绘制剪力弯矩图的方法。并深刻理解剪力、弯矩和分布荷载集度间的微分关系，以及掌握用该关系绘制或检验梁的剪力、弯矩图的方法。本章具体内容概要为：

1. 静定梁的基本形式

(1) 简支梁：一端固定，一端活动。

(2) 外伸梁：简支梁的一端或两端伸出支座外。

(3) 悬臂梁：一端固定，一端自由。

2. 弯曲内力及其符号

梁的弯曲内力分量包括剪力 F_S和弯矩 M。仍采用截面法确定其值的大小。

内力分量符号的规定。任一截面上剪力以对杆段另一端横截面形心产生顺时针力矩时为正，以对杆段另一端横截面形心产生逆时针力矩时为负。任一截面上弯矩以使梁段下侧纵向纤维拉长，上侧压短时为正；以使梁段上侧纵向纤维拉长；下侧压短时为负。

3. 剪力、弯矩计算规则

(1) 某横截面上的剪力 F_S 等于作用在该横截面任一侧(左侧或右侧)梁上所有外力在该横截面及其延展面上的投影代数和。对该横截面形心产生顺时针力矩的外力，在该横截面及其延展面上的投影取正，反之取负。

(2) 某横截面上的弯矩 M 等于作用在该横截面任一侧(左侧或右侧)梁上所有外力对该横截面形心的力矩代数和。外力对该横截面形心产生的力矩使该横截面下侧纵向纤维拉长时取正，反之取负。据此规则，在实际计算中可不必将梁假想地截开，取研究对象，而直接从横截面的任意一侧梁上的外力来求该横截面上的剪力和弯矩。

4. 弯曲内力的表示方式

任一截面上的弯曲内力均可采用剪力和弯矩方程，或剪力图和弯矩图表示。采用截面法即可列出剪力方程和弯矩方程。至于剪力图和弯矩图其定义方式和轴力图是类似的。

5. 集中力、集中力偶两侧受力情况

在集中力两侧的相邻横截面上，弯矩相同而剪力发生突变，且突变量等于集中力的大小。在集中力偶两侧的相邻横截面上，剪力相同而弯矩发生突变，且突变量等于集中力偶的大小。

6. 剪力、弯矩与分布荷载集度间的微分关系

(1) 对于一段梁内，若无荷载作用，即 $q(x)=0$，则在这段梁内剪力 $F_S(x)=$常数，剪力图是平行于 x 轴的直线，由$\dfrac{d^2M(x)}{dx^2}=q(x)=0$，知 $M(x)$是一次函数，弯矩图是斜直线。

(2) 对于一段梁，若作用均布荷载，即 $q(x)=$常数，则$\dfrac{d^2M(x)}{dx^2}=\dfrac{dF_S}{dx}=q(x)=$常数，在这段梁内 $F_S(x)$是一次函数，$M(x)$是二次函数，故剪力图是斜直线，弯矩图是二次抛物线。

(3) 对一段梁，若 $F_S(x)=\dfrac{dM(x)}{dx}=0$，则在这一截面上弯矩有一极小值或极大值，即弯矩的极值发生在剪力为零的截面上。

7. 刚架、斜梁和曲杆的内力方程和内力图

刚架和曲杆的平面问题一般有三个内力：轴力、剪力和弯矩。刚架轴力计算规则为：某横截面上的轴力 F_N 等于作用在该横截面任一侧(左侧或右侧)梁上所有外力在该横截面

法线上的投影代数和。当外力箭头离开该横截面时，该外力在该横截面法线上的投影取正，反之取负。刚架剪力、弯矩计算规则与前述相同。习惯上按下列约定：

(1) 刚架的弯矩图画在各杆纵向纤维的受拉一侧，不注明正、负号。

(2) 刚架的剪力图及轴力图可画在刚架杆轴线的任一侧(通常正值画在刚架的外侧)，须注明正、负号。

(3) 斜梁、曲杆横截面上的内力情况及其内力图的绘制方法，与刚架的相类似。

思　考　题

5.1　试问：(1)在图 5.18(a)所示梁中，AC 段和 CB 段剪力图图线的斜率是否相同？为什么？

(2) 在图 5.18(b)所示梁的集中力偶作用处，左、右两段弯矩图图线的切线斜率是否相同？

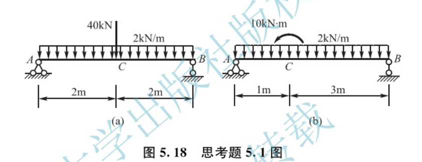


图 5.18　思考题 5.1 图

5.2　具有中间铰的矩形截面梁上有一活动荷载 F 可沿全梁 l 移动，如图 5.19 所示。试问如何布置中间铰 C 和可动铰支座 B，才能充分利用材料的强度？

5.3　简支梁的半跨长度上承受集度为 m 的均布外力偶作用，如图 5.20 所示。试作梁的 F_S、M 图。

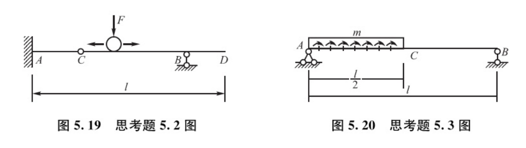


图 5.19　思考题 5.2 图　　**图 5.20　思考题 5.3 图**

习　　题

5.1　试求如图 5.21 所示各梁指定截面上的剪力和弯矩(各截面无限趋近集中荷载作用点或支座)。

5.2　试列出如图 5.22 所示各梁的剪力方程和弯矩方程，作剪力图和弯矩图，并求 $|F_S|_{max}$ 和 $|M|_{max}$。

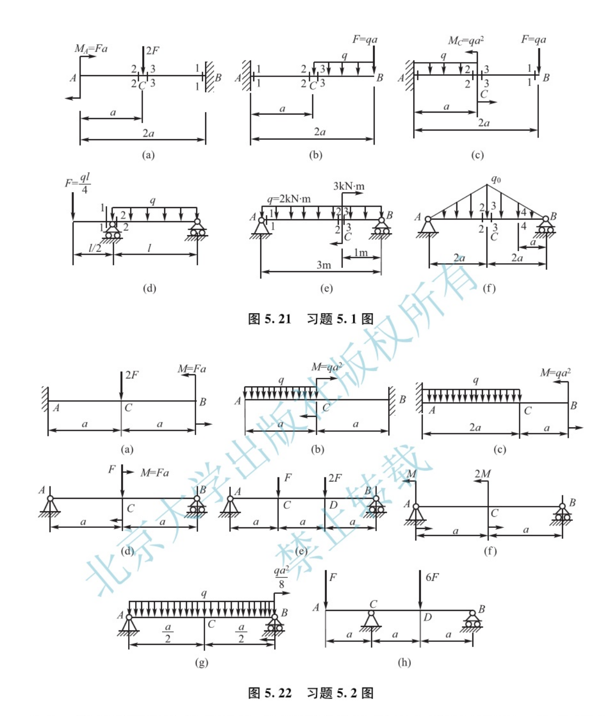


图 5.21 习题 5.1 图

图 5.22 习题 5.2 图

5.3 用控制截面法作出图 5.23 所示外伸梁的剪力图和弯矩图，并求 $|F_S|_{max}$ 和 $|M|_{max}$。

5.4 用叠加法作如图 5.24 所示各梁的弯矩图。

5.5 设梁的剪力图如图 5.25 所示，试根据荷载集度 $q(x)$、剪力 $F_S(x)$ 和弯矩 $M(x)$ 间的微分关系作弯矩图及荷载图。已知梁上没有作用集中力偶。

图 5.23　习题 5.3 图

图 5.24　习题 5.4 图

图 5.25　习题 5.5 图

第6章 弯曲应力

教学目标

掌握纯弯曲横截面上的应力的推导过程
熟练掌握横力弯曲梁的正应力及正应力强度计算方法
熟练掌握横力弯曲梁的弯曲正应力及剪应力强度计算方法
理解梁的合理设计的概念
掌握电测试验应力的基本原理和方法
了解两种材料的组合梁正应力、剪应力强度计算方法

教学要求

知识要点	能力要求	相关知识
纯弯曲横截面上的应力	(1) 掌握纯弯曲横截面上的应力的推导过程 (2) 掌握矩形、圆形、圆环形、箱形、组合工字形、T形截面惯性矩 I_z、抗弯截面系数 W_z 的计算方法	积分的概念 空间一般力系的合成
横力弯曲梁的正应力及正应力强度计算方法	(1) 熟练掌握横力弯曲梁的正应力在横截面上的分布规律 (2) 熟练掌握横力弯曲梁的正应力强度计算方法	组合平面的形心 惯性矩平行移轴公式
横力弯曲梁的弯曲切应力及切应力强度计算方法	(1) 理解横力弯曲梁横截面上的切应力推导过程 (2) 熟练掌握横力弯曲梁的切应力在横截面上的分布规律 (3) 熟练掌握横力弯曲梁的切应力强度计算方法	积分的概念 空间一般力系的合成 平面图形对轴的静矩
梁的合理设计的概念	(1) 理解提高梁弯曲强度的措施 (2) 理解等强度梁的概念	塑性材料、脆性材料抗拉及抗压特性

引言

直梁弯曲时，横截面上一般会产生两种内力——剪力和弯矩，这种既有弯矩又有剪力的杆件弯曲称为横力弯曲；在某些情况下，梁的某区段或整个梁内，横截面上只有弯矩而无剪力，这种只有弯矩而无

剪力的杆件弯曲称为纯弯曲。

本章主要研究横力弯曲梁的正应力及正应力强度计算方法；横力弯曲梁的弯曲切应力及切应力强度计算方法；为此，首先推导纯弯曲横截面上的应力公式，然后根据弹性力学的精确分析计算结果把纯弯曲横截面上的应力公式推广到横力弯曲截面上。本章的学习非常重要，它是将来学习杆件组合变形时横截面上的应力的基础，也是将来学习《钢结构》、《混凝土结构》中梁的强度校核和截面设计的基础。

6.1 概　　述

第5章详细讨论了梁横截面上的剪力和弯矩，梁的剪力、弯矩与梁的截面尺寸、形状以及梁的材料性质无关。但实践证明，剪力和弯矩相同的两个梁，虽然横截面的面积相等，若几何形状不同，其强度和刚度却不同，如图6.1(a)、(b)所示。而且即使横截面的尺寸和几何形状均相同，若梁的放置方位不同(如有卧放与竖放之分)其强度和刚度也不同，如图6.1(c)、(d)所示。这说明梁的强度不仅与其内力数值有关，而且与横截面形状及内力在横截面上的分布情况有关，因此必须研究梁的弯曲应力。

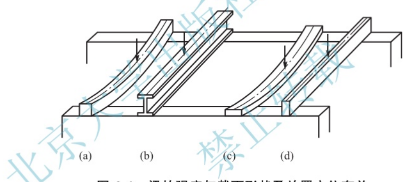


图6.1　梁的强度与截面形状及放置方位有关

因为剪力是横截面上切向分布内力的合力；弯矩是横截面上法向分布内力的合力偶矩，所以一般梁的横截面上既有切向应力，即切应力τ，又有法向应力，即正应力σ。本章研究等截面直梁在平面弯曲时横截面上的正应力和剪应力的计算方法，以及相应的正应力强度条件和切应力强度条件。

6.2 梁横截面上的正应力和强度条件

6.2.1　梁横截面上的正应力

直梁弯曲时，横截面上一般会产生两种内力—剪力和弯矩，这种既有弯矩又有剪力的杆件弯曲称为横力弯曲(nonuniform bending)；在某些情况下，梁的某区段或整个梁内，横截面上只有弯矩而无剪力，这种只有弯矩而无剪力的杆件弯曲称为纯弯曲(pure bending)。

如图 6.2(a)所示的简支梁，承受对称于梁中点的集中力 F 作用，其计算简图如图 6.2(b)所示。剪力图和弯矩图如图 6.2(c)、(d)所示。在 AC、BD 段的横截面上，剪力和弯矩同时存在，为横力弯曲；而在 CD 段的横截面上，剪力为零，弯矩 $M=Fa$ 为常量，为纯弯曲。

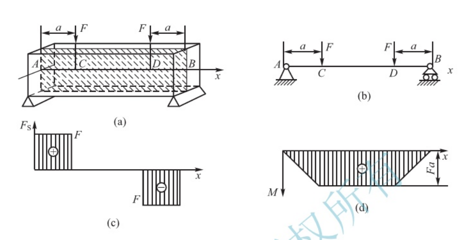


图 6.2 简支梁受力情况

梁横力弯曲时，横截面上既有剪力，又有弯矩，相对应地，横截面上必然同时存在两种应力——切应力和正应力。但当梁发生纯弯曲时，因横截面上只有弯矩，则只存在正应力，而无切应力。下面我们先针对纯弯曲情况来分析正应力与弯矩的关系，导出纯弯曲梁的正应力计算公式。以矩形截面梁为例，分析时需综合考虑变形几何关系、物理关系和静力学关系三方面。

1. 变形几何关系(Deformation Geometric Relation)

首先通过试验观察梁的变形。取一矩形截面梁，在其中段的侧面上，画两条平行于轴线的纵向直线 PP、SS，垂直于轴线的横向直线 mm、nn [图 6.3(a)]，然后按图 6.3(b)所示的方式加载，梁的中段便处于纯弯曲状态。此时可观察到下列变形现象 [图 6.3(b)]。

(1) 纵向直线 PP、SS 变成圆弧线 $P'P'$、$S'S'$，且 $P'P'$ 比 PP 缩短，$S'S'$ 比 SS 伸长。

(2) 横向直线 mm、nn 仍为直线，只是相对转过一个角度，但仍与 $P'P'$、$S'S'$弧线垂直。

根据上述梁表面的变形现象，运用推理方法，可认为侧面上的横向直线反映整个横截面的变形，于是对梁的内部变形作出如下假设❶：梁的横截面在纯弯曲变形时仍保持为平面，并且仍垂直于变形后梁的轴线，只是绕横截面上某一轴转过了一个角度。此假设称为平面假设。

在平面假设的基础上，若设想梁由多层纵向纤维组成，则梁弯曲变形时，上部纤维缩短，下部纤维伸长。由于变形的连续性，中间必有一层纤维层既不伸长，也不缩短。这一纤维层称为中性层，中性层与横截面的交线称为中性轴，如图 6.3(c)所示。

下面进行几何分析，以找出梁纵向线应变沿横截面高度的变化规律。为此，从图 6.3

---

❶ 该假设之所以能成立，是因为根据这些假设所推导出的应力和变形的计算公式的可靠性已为试验所证实，而且用弹性力学可以分析证明纯弯曲时梁的横截面是保持为平面。

所示的梁中取出 dx 一段，如图 6.4 所示。设梁变形后该微段两端面相对转过 $d\varphi$ 角，中性层曲率半径为 ρ，横截面对称轴为 y 轴，中性轴为 z 轴。现研究微段上距中性轴为 y 处纤维 ab 的线应变。

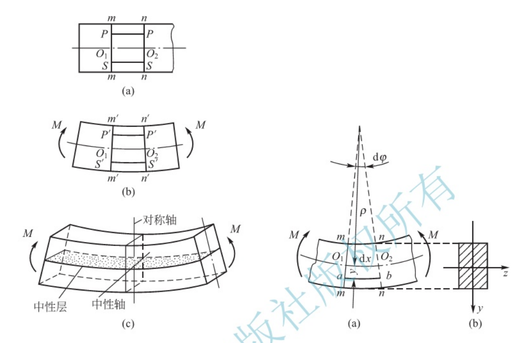


图 6.3　矩形截面梁纯弯曲时的变形现象　　**图 6.4　纯弯曲时梁的微段变形**

变形前，$ab=dx=O_1O_2=\rho d\varphi$，变形后，$ab=(\rho+y)d\varphi$，因此 ab 纤维的线应变为

$$\varepsilon=\frac{(y+\rho)d\varphi-\rho d\varphi}{\rho d\varphi}=\frac{y}{\rho} \tag{6-1}$$

在取定截面处，曲率 $1/\rho$ 为常量，故式(6－1)表明梁的纵向线应变 ε 与纤维到中性轴的距离 y 成正比。

2. 物理关系(Physical Relationship)

在小变形下，梁纯弯曲时纵向纤维之间的相互挤压作用可忽略不计，即认为各纵向纤维均处于单向拉伸或压缩的受力状态。因此，当弯曲正应力不超出材料的比例极限时，纵向纤维上的正应力与线应变服从胡克定律。

$$\sigma=E\varepsilon$$

将式(6－1)代入上式得

$$\sigma=\frac{E}{\rho}y \tag{6-2}$$

由式(6－2)可见，横截面上任一点处的正应力与该点到中性轴的距离 y 成正比，与 z 坐标无关。即弯曲正应力沿横截面高度按线性规律分布，如图 6.5 所示。

3. 静力学关系(Static Relationship)

式(6－2)虽解决了弯曲正应力 σ 的分布规律，但还不能直接用来计算正应力。因为曲率 $1/\rho$ 与弯矩的关系未知，中性轴 z 的位置尚未确定。这可由静力学关系来解决。

在横截面上坐标为(y，z)处取微面积 dA，其上作用着法向微内力 σdA，如图 6.6 所示。

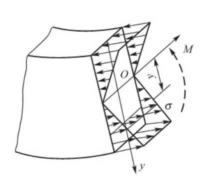


图 6.5 矩形截面梁横截面上正应力分布情况

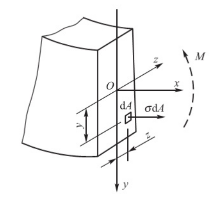


图 6.6 正应力与内力分量间的关系

整个横截面各点处这样的微内力组成空间平行力系。由于纯弯曲时梁内仅存在位于纵向对称平面内的弯矩 M，$M=M_z$，根据静力合成法则，此空间平行力系应满足下列三个式子

$$F_N = \int_A \sigma \mathrm{d}A = 0 \tag{6-3}$$

$$M_y = \int_A z\sigma \mathrm{d}A = 0 \tag{6-4}$$

$$M_z = \int_A y\sigma \mathrm{d}A = M \tag{6-5}$$

由式(6-3)、式(6-4)、式(6-5)三个式子可确定中性轴位置，得到正应力计算公式。

将式(6-2)代入式(6-3)，有

$$\frac{E}{\rho}\int_A y \mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}S_z = 0 \tag{6-6}$$

式中，S_z为截面静矩，$S_z = \int_A y\mathrm{d}A$。

式(6-6)中$\frac{E}{\rho}$不会等于零，则必有 $S_z=Ay_C=0$，即 $y_C=0$。这表明中性轴必通过截面形心，从而确定了中性轴位置。

当 y 轴为对称轴时，式(6-4)是自行满足的。

将式(6-2)代入式(6-5)，并引入记号 $I_z = \int_A y^2 \mathrm{d}A$，称为截面对中性轴的惯性矩，得

$$\frac{E}{\rho}\int_A y^2 \mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}I_z = M$$

从而确定了中性层的曲率为

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI_z} \tag{6-7}$$

式(6-7)建立了曲率 $1/\rho$ 与弯矩M 间的关系，是研究梁弯曲变形的基本公式。式中 EI_z 称为截面的抗弯刚度。再将式(6-7)代入式(6-2)，即得等直梁纯弯曲时横截面上任一点正应力的计算公式

$$\sigma=\frac{My}{I_z} \tag{6-8}$$

在应用式(6-8)时，M 和 y 可用代数值代入，并以所得结果的正负来辨别正应力的正负。也可将 M 和 y 的绝对值代入，再根据梁的截面上弯矩符号来判别正应力是拉应力还是压应力，即以中性层为界，当截面上弯矩为正值时，中性轴以下各点处是拉应力，中性轴以上各点处是压应力，当截面上弯矩为负值时，中性轴以下各点处是压应力，中性轴以上各点处是拉应力。

最后指出，式(6-8)是在纯弯曲条件下推导出来的。在横力弯曲情况下，由于横截面上还有切应力作用，截面将发生翘曲，平面假设不再成立，即切应力的存在将影响正应力分布规律。但是，由弹性力学的精确分析计算结果可知：对于跨度与横截面高度之比$\left(\frac{l}{h}\right)$大于等于5倍的细长梁在横力弯曲时，用式(6-8)计算所得正应力的误差甚微。例如受均布荷载作用的矩形截面简支梁，当$\frac{l}{h}=5$时，正应力的误差仅为1%。工程中常用的梁，其$\frac{l}{h}$之比远大于5，因此用式(6-8)计算正应力，满足精度要求。对于少数$\frac{l}{h}<5$的深梁，则须用弹性力学有关理论和方法进行计算。梁在纯弯曲时，各横截面上的弯矩相等，因此梁的最大正应力就发生在各个横截面距中性轴最远的边缘上。但横力弯曲时，横截面上的弯矩值随截面位置而变化，计算梁的最大正应力须首先分析并确定最大正应力发生在哪个横截面的哪个点处，即首先确定梁正应力的危险截面和危险点的位置，然后计算危险点处的正应力值。现举例说明。

例 6.1 矩形截面悬臂梁如图 6.7 所示，$F=1\text{kN}$。试计算 1-1 截面上 A、B、C 各点的正应力，并指明是拉应力还是压应力。

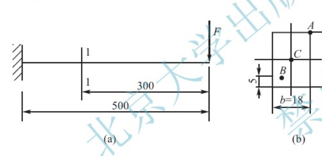


图 6.7 例 6.1 图

解：(1) 求 1-1 截面的弯矩。由截面法得

$$M_1=-1\times10^3\times300\times10^{-3}=-300\text{N}\cdot\text{m}$$

(2) 计算截面惯性矩

$$I_z=\frac{bh^3}{12}=\frac{18\times30^3}{12}=4.05\times10^4(\text{mm}^4)$$

(3) 计算应力。由式(6-8)得

A 点 $$\sigma_A=\frac{M_1y_A}{I_z}=\frac{-300\times(-15)\times10^{-3}}{4.05\times10^{-4}\times10^{-12}}=111(\text{MPa})$$

B 点 $$\sigma_B=\frac{M_1y_B}{I_z}=\frac{-300\times10\times10^{-3}}{4.05\times10^{-4}\times10^{-12}}=-71.1(\text{MPa})$$

C 点 $$\sigma_C=\frac{M_1y_C}{I_z}=\frac{-300\times0}{4.05\times10^{-4}\times10^{-12}}=0(\text{MPa})$$

求得的 A 点的应力为正值，表明该点为拉应力，B 点的应力为负值，表明该点为压应力，C 点无应力。当然，求得的正应力是拉应力还是压应力，也可根据梁的变形情况来判别。

6.2.2 梁的正应力强度条件

由式(6-8)可知，对于某一横截面来说，最大正应力 $\sigma_{\max}$ 位于 $y_{\max}$ 处；而对于等截面

直梁来说，最大弯矩 M_{max} 所在的截面最危险。因此，对全梁而言，截面上、下对称时，最大正应力发生在最大弯矩所在的横截面上距中性轴最远的各点处，即

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}y_{max}}{I_z}$$

令

$$W_z=\frac{I_z}{y_{max}}$$

则上式可改写成

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_z} \tag{6-9}$$

根据强度要求，梁的最大工作应力 σ_{max} 不得超过材料的许用弯曲正应力，即

$$\sigma_{max}\leqslant[\sigma] \tag{6-10}$$

式(6-10)就是梁的正应力强度条件。式中 W_z 称为抗弯截面系数，有时简写为 W，它与截面的形状和尺寸有关，是衡量截面抗弯强度的一个几何量。常用单位是 mm^3、cm^3 或 m^3。显然，W_z 值越大，从强度角度看，就越有利。

对于高度为 h、宽度为 b 的矩形截面，$W_z=\frac{1}{6}bh^2$；对于直径为 d 的圆形截面，$W_z=\frac{\pi d^3}{32}$；对于外直径为 D，内直径为 d 的空心圆形截面，$W_z=\frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$，其中 α 称为直径比，$\alpha=\frac{d}{D}$；各种标准型钢的 W_z 值可从型钢表中查得，见附录Ⅰ。

应当指出，对于铸铁这类脆性材料，由于其抗拉和抗压强度不同，应对最大拉应力 $\sigma_{t,max}$ 和最大压应力 $\sigma_{c,max}$ 分别进行强度计算。这时强度条件应写成

$$\sigma_{t,max}=\frac{M_{max}y_t}{I_z}\leqslant[\sigma_t] \tag{6-11a}$$

$$\sigma_{c,max}=\frac{M_{max}y_c}{I_z}\leqslant[\sigma_c] \tag{6-11b}$$

式中，$[\sigma_t]$ 和 $[\sigma_c]$ 分别为弯曲时的许用拉应力和许用压应力。

利用梁的正应力强度条件，可解决梁的三类强度计算问题。

1. 校核强度(Check the Intensity)

已知梁的截面形状尺寸、材料及所受荷载，验证梁的强度是否满足式(6-10)或式(6-11a)、式(6.11b)。

2. 设计截面(Determine the Allowable Dimension)

已知梁的材料及所受荷载，先按下式

$$W_z\geqslant\frac{M_{max}}{[\sigma]}$$

求出抗弯截面系数 W_z，再根据 W_z 确定截面尺寸。

3. 求许可荷载(Determine the Allowable Load)

已知梁的截面形状尺寸及所用材料，先按下式

$$M_{max}\leqslant W_{max}[\sigma]$$

求出最大弯矩 M_{max}，然后据 M_{max} 与荷载的关系确定梁能承受的最大荷载。

例 6.2 某矩形截面简支梁，承受 $F_1=40$kN，$F_2=60$kN 两个集中荷载作用，如图 6.8(a)所示，其弯矩图如图 6.8(b)所示，试确定该梁在以下情况的最大正应力值：(1)横截面积为 $b\times h=100\times150=1.5\times10^4$(mm²)，梁立放，如图 6.8(c)所示。(2)矩形梁的横截面边长不变，但将梁卧放，如图 6.8(d) 所示。(3)横截面面积为 1.5×10^4mm² 的圆形截面，如图 6.8(e) 所示。(4)横截面面积接近为 1.5×10^4mm² 的工字形型钢截面如图 6.8(f)所示。

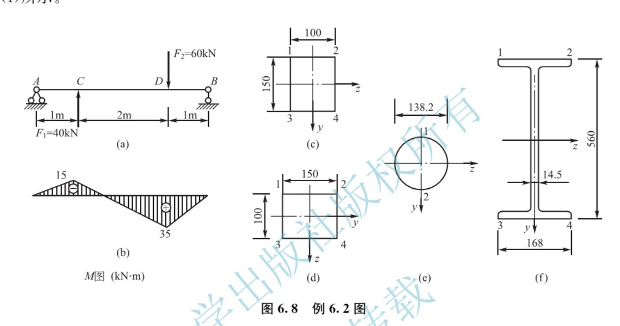


图 6.8 例 6.2 图

解：(1) 确定危险截面和危险点的位置。对横截面有水平对称轴的等直梁，其任一横截面上正的与负的的绝对值相等，故当横截面上弯矩的绝对值最大时，该横截面就是危险截面，危险截面的上、下边缘处各点就是危险点。本例题 D 点处的横截面是危险截面，该横截面上 1－2 线和 3－4 线上各点是危险点，如图 6.8(c)、(d)、(f)所示。圆形横截面梁的危险点在 1、2 两点，如图 6.8(e)所示。

(2) 计算危险点处的正应力

① 竖放的矩形截面梁，中性轴为 z 轴，平行于矩形的短边。

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_z}=\frac{35\times10^3}{\frac{1}{6}\times100\times150^2\times10^{-9}}=93.3\times10^6(\text{Pa})=93.3(\text{MPa})$$

② 卧放的矩形截面梁，中性轴为 y 轴平行于矩形的长边。

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_y}=\frac{35\times10^3}{\frac{1}{6}\times150\times100^2\times10^{-9}}=140\times10^6(\text{Pa})=140(\text{MPa})$$

③ 圆形截面梁，当圆面积 $A=150\times10^3\text{mm}^2$ 时，圆直径 $D=\sqrt{\frac{4A}{\pi}}=\sqrt{\frac{4\times1.5\times10^4}{\pi}}=$ 138.2(mm)其中：$W_z=\frac{\pi}{32}D^3=\frac{\pi}{32}\times138.2^3=259\ 133(\text{mm}^3)$，所以

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_z}=\frac{35\times10^3}{259\ 133\times10^{-9}}=135\times10^6(\text{Pa})=135(\text{MPa})$$

④ 工字形截面梁，由型钢表查得横截面积与 $150\times10^3\text{mm}^2$ 最接近的工字钢是 I56b 号，其横截面积为 $A=1.466\times10^4\text{mm}^2$，$W_z=2\ 450\times10^3\text{mm}^3$，所以

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}=\frac{35\times10^3}{2\ 450\times10^3\times10^{-9}}=14.3\times10^6(\text{Pa})=14.3(\text{MPa})$$

本题中，在横截面积近似相等时，采用矩形竖放、矩形卧放、圆形、工字形截面时，最大正应力之比为 1∶1.5∶1.45∶0.153。

由上述比较可见，横截面面积相同而形状分别为矩形(竖放)、圆形和工字形的三种梁中，圆形截面梁的正应力最大，工字形截面梁最小；同为矩形截面的梁，卧放使用比竖放使用时的正应力大。因此应十分重视梁截面形状的选择和使用。

例 6.3 T 形铸铁梁，受力和截面尺寸如图 6.9(a)、(c)所示，材料的许用拉应力 $[\sigma_t]=40\text{MPa}$，许用压应力 $[\sigma_c]=160\text{MPa}$。试校核梁的强度。

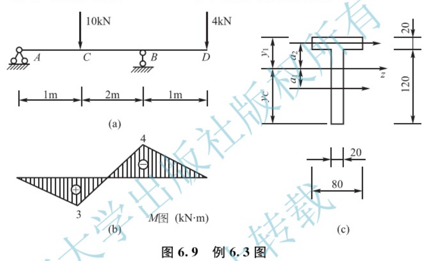


图 6.9 例 6.3 图

解：(1) 作梁的 M 图，如图 6.9(b)所示。

(2) 确定中性轴的位置、截面惯性矩 I_z。

中性轴到底边的距离

$$y_C=\frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}=\frac{20\times120\times60+80\times20\times130}{20\times120+80\times20}=88(\text{mm})$$

中性轴到顶边的距离

$$y_1=140-88=52(\text{mm})$$

截面惯性矩 I_z，因为

$$a_1=88-\frac{120}{2}=28(\text{mm}),\quad a_2=52-\frac{20}{2}=42(\text{mm})$$

所以

$$I_z=\sum I_{zi}=\left[\frac{20\times120^3}{12}+(-28)^2\times20\times120\right]+\left[\frac{80\times20^3}{12}+42^2\times80\times20\right]=764\times10^4(\text{mm}^4)$$

(3) 验算最大正应力

由于铸铁的抗拉、抗压性能不同，因此须计算最大拉应力和最大压应力，按式(6-11a)、式(6-11b)验算梁的抗拉强度和抗压强度。

在 B 截面上，弯矩 M_B 为负的最大值，梁上凸变形，最大拉应力发生在该截面上边缘处，最大压应力发生在该截面下边缘处，其值分别为

B 截面上边缘点有 $\sigma_{t,max1}=\left|\dfrac{M_B y_1}{I_z}\right|=\left|\dfrac{-4\times10^3\times52\times10^{-3}}{764\times10^{-8}}\right|=27.2(\text{MPa})$

B 截面下边缘点有 $\sigma_{c,max1}=\left|\dfrac{M_B y_C}{I_z}\right|=\left|\dfrac{-4\times10^3\times88\times10^{-3}}{764\times10^{-8}}\right|=46.1(\text{MPa})$

在 C 截面上，弯矩 M_C 为正的最大值，梁下凸变形，最大拉应力发生在该截面下边缘处，最大压应力发生在该截面上边缘处，其值分别为

C 截面上边缘点有 $\sigma_{c,max2}=\left|\dfrac{M_C y_1}{I_z}\right|=\dfrac{3\times10^3\times52\times10^{-3}}{764\times10^{-8}}=27.23(\text{MPa})$

C 截面下边缘点有 $\sigma_{t,max2}=\left|\dfrac{M_C y_C}{I_z}\right|=\dfrac{3\times10^3\times88\times10^{-3}}{764\times10^{-8}}=34.6(\text{MPa})$

由此可见，全梁的最大拉应力为 $\sigma_{t,max}=\sigma_{t,max2}=34.6\text{MPa}\leqslant[\sigma_t]$，发生在 C 截面下缘处，全梁的最大压应力为 $\sigma_{c,max}=\sigma_{c,max1}=46.1\text{MPa}\leqslant[\sigma_c]$，发生在 B 截面下缘处。所以全梁满足正应力强度条件。

6.3 梁横截面上的切应力和强度条件

横力弯曲时，梁横截面上不仅有正应力，同时还有切应力。本节首先以矩形截面梁为例，说明研究弯曲切应力的方法，然后介绍几种常见截面梁的切应力计算公式，以及切应力强度计算问题。

6.3.1 梁横截面上的切应力(Shear Stresses in Beams)

1. 矩形截面梁

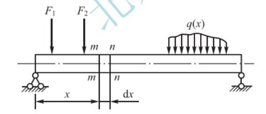


图 6.10 矩形截面梁受任意横向荷载作用

图 6.10 为一矩形截面梁受任意横向荷载作用。以 $m-m$ 和 $n-n$ 两横截面假想地从梁中取出长为 $\mathrm{d}x$ 的微段，在一般情况下，该两横截面上的弯矩并不相等，因而两横截面上同一 y 坐标处的正应力也不相等。再用平行于中性层的纵截面 AA_1BB_1 假想地从梁段上截出体积元素 mB_1 [图 6.11(a)、(b)]，

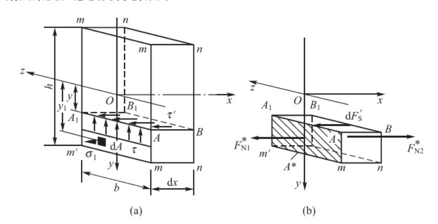


图 6.11 矩形截面梁受力情况

则在端面 mA_1 和 nB_1 上，与正应力对应的法向内力也不相等。因此，为维持体积元素 mB_1 的平衡，在纵面 AB_1 上必有沿 x 方向的切向内力，故在纵面上就存在相应的切应力 τ' [图 6.11(a)]。

为了推导切应力的表达式，对于矩形截面梁横截面上的切应力分布，一般可作如下两个假设：

(1) 横截面上各点处切应力的方向都平行于剪力 F_S；

(2) 切应力沿截面宽度均匀分布，即距中性轴等距离各点处的切应力相等。

弹性力学中已证明，对于狭长矩形梁，这两个假设完全可用；对于高度大于宽度的矩形截面梁，根据以上假设也能得到足够精确的解答。

有了以上两条假设，以及对弯曲正应力的研究结果，再运用静力平衡条件即可导出切应力计算公式。设在图 6.10 中距左端为 x 和 $x+\mathrm{d}x$ 处横截面 $m-m$ 和 $n-n$ 上的弯矩分别为 M 和 $M+\mathrm{d}M$，两截面上距中性轴为 y_1 处的正应力分别为 σ_1 和 σ_2，于是，可得两端面上的法向内力 F_{N1}^* 和 F_{N2}^* [图 6.11(b)] 为

$$F_{N1}^* = \int_{A^*} \sigma_1 \mathrm{d}A = \int_{A^*} \frac{My_1}{I_z}\mathrm{d}A = \frac{M}{I_z}\int_{A^*} y_1 \mathrm{d}A = \frac{M}{I_z}S_z^* \tag{6-12}$$

$$F_{N2}^* = \int_{A^*} \sigma_2 \mathrm{d}A = \int_{A^*} \frac{(M+\mathrm{d}M)y_1}{I_z}\mathrm{d}A = \frac{M+\mathrm{d}M}{I_z}S_z^* \tag{6-13}$$

纵面 AB_1 上由切应力 τ' 所组成的切向内力为

$$\mathrm{d}F_S' = \tau' b \mathrm{d}x \tag{6-14}$$

将式(6-12)、式(6-13)、式(6-14)代入平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_{N2}^* - F_{N1}^* - \mathrm{d}F_S' = 0$$

经化简后即得

$$\tau' = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \times \frac{S_z^*}{I_z b}$$

由于 $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = F_S$，并根据切应力互等定理($\tau = \tau'$)，可得

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b} \tag{6-15}$$

式中，F_S 为横截面上的剪力；I_z 为横截面对中性轴 z 的惯性矩；b 为横截面的宽度；S_z^* 为横截面上距中性轴为 y 的横线与同侧边缘线围成的面积 [图 6.11(b)中阴影线面积] 对中性轴的静矩。

式(6-15)就是矩形截面梁横截面上任一点处切应力的计算公式。

应用式(6-15)时，F_S 和 S_z^* 均以绝对值代入，切应力的方向与 F_S 的方向相同。

下面讨论切应力沿截面高度的分布规律。对于矩形截面，式(6-15)中的 F_S 和 I_z 和 b 均为常量，只有静矩 S_z^* 随欲求应力计算点的位置不同而变化，是坐标 y 的函数。

$$S_z^* = \int_A y_1 \mathrm{d}A = \int_y^{\frac{h}{2}} y_1 b \mathrm{d}y_1 = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

或由图 6.12 得

$$S_z^* = A^* y_0 = b\left(\frac{h}{2} - y\right) \times \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

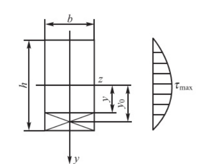


图 6.12　矩形截面梁切应力分布

把以上 S_z^* 表达式代入(6－15)式，得

$$\tau=\frac{F_S}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$$

由此可见，切应力大小沿截面高度按二次抛物线规律变化。当 $y=\pm\frac{h}{2}$时，$\tau=0$，即截面上、下边缘处的切应力为零；当 $y=0$ 时

$$\tau_{max}=\frac{3F_S}{2bh}=1.5\frac{F_S}{A}=1.5\bar{\tau} \tag{6-16}$$

即中性轴上的切应力最大，其值为矩形截面梁上的最大切应力为平均切应力的 1.5 倍。

2. 工字形、槽形、T 形和箱形截面梁

(1) 组合工字形截面梁

组合工字形截面梁由上下翼缘和腹板组成，在翼缘和腹板上都有切应力。但翼缘上的切应力分布情况比较复杂，且工字形截面上的剪力主要由腹板承担，因此我们只介绍腹板上的切应力。

腹板为狭长矩形，故对于矩形截面切应力分布的两个假设仍然适用。按照矩形截面切应力计算公式相同的推导方法，可导出工字形截面切应力的计算公式，其形式与矩形截面的相同，工字形截面腹板上切应力仍沿腹板高度按二次抛物线规律分布，最大切应力发生在截面中性轴上，如图 6.13 所示。截面上最大切应力为

$$\tau_{max}=\frac{F_S S_{z,max}^*}{I_z d} \tag{6-17}$$

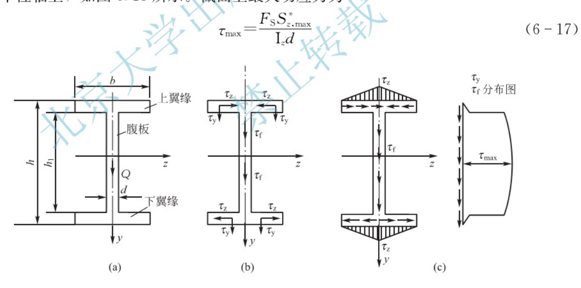


图 6.13　工字形截面梁腹板上切应力大小沿梁高分布

式中，d 为工字形截面腹板的厚度，$S_{z,max}^*$为以中性轴为界上侧(或下侧)截面积对中性轴的静矩。

(2) 轧制工字钢截面梁

轧制工字钢截面梁最大切应力仍发生在横截面中性轴上，其值仍按(6－17)式进行计算，且式中$\frac{I_z}{S_{z,max}^*}$就是型钢表中的$\frac{I_x}{S_x}$，可从型钢表中直接查得。

(3) 槽形、T 形、箱形等薄壁截面梁

槽形、T 形、箱形等薄壁截面梁最大切应力也发生在中性轴上，其值均可用(6－17)

计算。但箱形截面梁应用式(6-17)式时应注意，式中 d 必须以两腹板厚度之和代入。

由于腹板上最大与最小切应力相差甚小，分析又表明腹板几乎承担了横截面上的全部剪力，故可近似地认为腹板上的切应力均匀分布，且其平均值即为截面上的最大切应力，即

$$\tau_{\max}=\frac{F_S}{dh_1} \tag{6-18}$$

3. 圆形截面和薄壁圆环形截面梁

这两种截面上的切应力分布情况比较复杂，这里仅介绍最大切应力。理论研究结果表明，圆形截面和薄壁圆环形截面的最大切应力仍发生在中性轴上，且沿中性轴均匀分布，方向平行于剪力，如图 6.14(a)、(b) 所示。其最大切应力的计算公式分别为

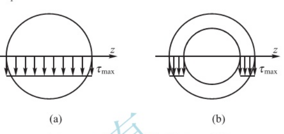


图 6.14 圆形和薄壁圆环形截面梁的切应力分布情况

圆形截面

$$\tau_{\max}=\frac{4F_S}{3A}=\frac{4}{3}\bar{\tau} \tag{6-19}$$

式中，A 为圆形截面面积。

薄壁圆环形截面梁

$$\tau_{\max}=2\frac{F_S}{A}=2\bar{\tau} \tag{6-20}$$

式中，A 为薄壁圆环形截面面积。

6.3.2 梁的切应力强度计算

由前面分析可知，矩形、工字形、T 形和箱形截面梁的最大切应力发生在剪力最大的截面内，且一般位于中性轴上，其值为

$$\tau_{\max}=\frac{F_{S,\max}S_{z,\max}^{*}}{I_z b}$$

与梁的正应力强度计算一样，为了保证梁安全工作，梁在荷载作用下产生的最大切应力不能超过材料的许用切应力。因此，梁切应力的强度条件(strength condition)为

$$\tau_{\max}\leqslant[\tau] \tag{6-21}$$

式中，$\tau_{\max}$为梁危险点处的切应力，$[\tau]$ 为材料的许用切应力。

在梁的强度计算中，必须同时满足正应力和切应力两个强度条件。但在一般情况下，梁的正应力是支配强度计算的主要因素，即一般满足了正应力强度条件，切应力强度也能满足。但是，当遇到下列情况之一时，切应力强度条件可能起控制作用，必须作切应力强度校核。

(1) 当梁的跨度较短或者在支座附近作用有较大集中荷载时。这时梁的最大弯矩 $M_{\max}$ 可能较小，而最大剪力 $F_{S,\max}$却相对较大。

(2) 由铆接或焊接而成的组合截面(如工字形、槽形等)钢梁，当其腹板厚度较薄，而高度很大，致使厚度与高度之比值小于型钢的相应比值时，腹板上的切应力可能很大。

(3) 木梁由于木材顺纹方向抗切能力很差，当截面上切应力过大时，它可能沿中性层发生剪切破坏。

（4）由几块板胶合而成的梁，当胶合面切应力过大时，可能沿胶合面发生剪切破坏。

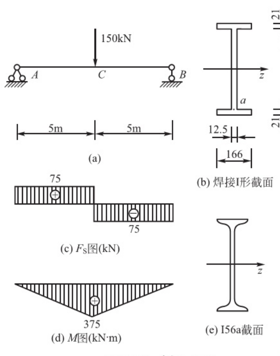


图 6.15　例 6.4 图

例 6.4　简支梁如图 6.15(a)所示，已知 $F=150\text{kN}$，$l=10\text{m}$。(1)若梁截面采用图 6.15(a)所示焊接工字形，求危险截面翼缘与腹板交接点 a 的正应力、切应力以及梁的最大正应力、最大切应力。(2)若梁截面采用 56a 工字形钢截面，求最大正应力、最大切应力。(3)若梁截面采用矩形木梁，$b=200\text{mm}$，$h=400\text{mm}$，求最大正应力、最大切应力之比。

解：（1）作梁的剪力图、弯矩图如图 6.15(c)、(d)所示。

（2）焊接Ⅰ形钢梁截面几何参数

$$I_z=\frac{166\times560^3}{12}-\frac{(166-12.5)\times(560-2\times21)^3}{12}$$
$$=6.5142\times10^8(\text{mm}^4)$$

$$W_z=\frac{6.514\ 2\times10^8}{28}=2.326\times10^6(\text{mm}^3)$$

求在计算 a 点和中性轴上切应力时要用到的 S_z^*，$S_{z,\max}^*$

$$S_z^*=166\times21\times\left(280-\frac{21}{2}\right)=9.395\times10^5(\text{mm}^3)$$

$$S_{z,\max}^*=125\times(280-21)\times\frac{280-21}{2}+9.395\times10^5=1.359\times10^6(\text{mm}^3)$$

（3）求焊接工字形钢梁危险截面翼缘与腹板交接点 a 的正应力、切应力以及梁的最大正应力、最大切应力。

C 左、右两侧截面剪力、弯矩均为最大，为危险截面，翼缘与腹板交接点 a 的正应力、切应力为

$$\sigma_a=\frac{M_C y_a}{I_z}=\frac{375\times10^3\times\dfrac{(560-42)}{2}\times10^{-3}}{6.5142\times10^{-4}}=149.1\times10^6(\text{Pa})=149.1(\text{MPa})$$

$$\tau_a=\frac{F_{SC}\times S_z^*}{I_z\times d}=\frac{75\times10^3\times9.395\times10^{-4}}{6.5142\times10^{-4}\times12.5\times10^{-3}}=8.7\times10^6(\text{Pa})=8.7(\text{MPa})$$

梁的最大正应力、最大切应力为

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}=\frac{M_C}{W_z}=\frac{375\times10^3}{2.326\times10^{-3}}=161.2\times10^6(\text{Pa})=161.2(\text{MPa})$$

$$\tau_{\max}=\frac{F_{SC}\times S_{z,\max}^*}{I_z\times d}=\frac{75\times10^3\times1.359\times10^{-3}}{6.514\ 2\times10^{-4}\times12.5\times10^{-3}}=12.5\times10^6(\text{Pa})=12.5(\text{MPa})$$

（4）采用 56a 工字形钢截面，查型钢表可得

$$\frac{I_z}{S_{z,\max}^*}=47.73\text{cm},\quad W_z=2\ 342\text{cm}^3,\quad b=1.25\text{cm}$$

最大正应力　$\sigma_{\max}=\dfrac{M_C}{W_z}=\dfrac{375\times10^3}{2.342\times10^{-3}}=160.1\times10^6(\text{Pa})=160.1(\text{MPa})$

最大切应力

$$\tau_{\max}=\frac{F_{SC}}{\dfrac{I_z}{S_{z,\max}^*}\times d}=\frac{75\times10^3}{47.73\times10^{-2}\times12.5\times10^{-3}}=12.6\times10^6(\text{Pa})=12.6\text{MPa}$$

(5) 若梁截面采用矩形木梁，$b=200\text{mm}$，$h=400\text{mm}$，最大正应力、最大切应力之比为

$$\sigma_{\max}:\tau_{\max}=\frac{M_C}{bh^2/6}:\frac{3F_{SC}}{2bh}=\frac{4M_C}{F_{SC}\times h}=\frac{4\times375\times10^3}{75\times10^3\times0.4}=50:1$$

可见，对于细长梁，最大正应力比最大切应力要大得多。故一般在校核实体截面梁的强度时，可不必校核抗剪强度。

6.4 提高梁弯曲强度的措施

在梁的强度设计中，既要保证梁有足够的强度，又要节省材料，减轻自重，以满足工程上既安全又经济的要求。这就需要考虑如何以较少的材料消耗使梁获得更大的承载能力问题。

前面曾指出，梁强度计算的主要依据是弯曲正应力强度条件，即

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}\leqslant[\sigma]$$

由上式可见，欲提高梁的弯曲强度，应当从合理布置梁上荷载和支座位置，以减小最大弯矩 $M_{\max}$，以及采用合理的截面形状以增大梁的抗弯截面系数等方面着手。现将几种常用的措施分述如下。

1. 合理布置梁上荷载和支座位置

在可能的情况下，适当调整梁上荷载作用的位置，可有效地减小梁内的最大弯矩值。如图 6.16(a)所示某铣床齿轮轴，受集中力 F 作用［图 6.16(b)］。齿轮安装应尽量靠近轴承，这样可使轴内的最大弯矩值$\frac{5Fl}{36}$比齿轮安装在跨度中间时［图 6.16(c)］的最大弯矩值$\frac{Fl}{4}$要小得多。

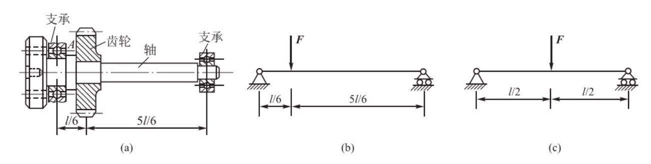


图 6.16 调整荷载位置以减小最大弯矩

对于梁受集中力作用的情况，如果可能，可将一个集中力分散为几个较小的集中力，也可减小梁内的最大弯矩值。如图 6.17(a)所示的简支梁，当集中力作用在跨度中

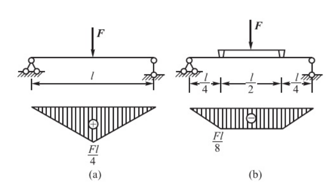


图 6.17 将集中力分散以减小最大弯矩

间时，梁的最大弯矩 $M_{\max}=\frac{Fl}{4}$。若采用一个辅梁，使集中力 F 通过辅梁再作用到梁上，如图 6.17(b)所示，则最大弯矩降为 $M_{\max}=\frac{Fl}{8}$。

同样，合理安排支座位置，也可以减小梁的最大弯矩值。如图 6.18(a)所示的简支梁受均布荷载 q 作用，梁内的最大弯矩 $M_{\max}=\frac{ql^2}{8}$。若将梁两端的支座均向内移动 $0.2l$，变为外伸梁，则梁内的最大弯矩降为 $M_{\max}=\frac{ql^2}{40}$ [图 6.18(b)]，只有前者的 20%。有些门式起重机就是根据上述原理设计的 [图 6.18(c)]。

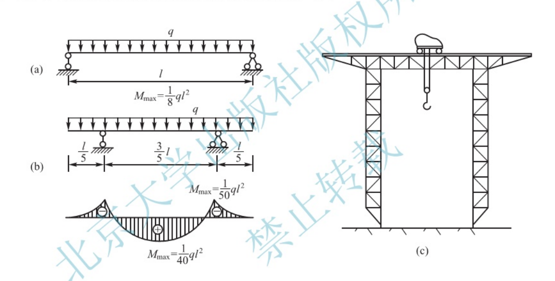


图 6.18 调整梁的支座位置以减小最大弯矩

2. 合理选用梁的截面形状

由弯曲正应力强度条件可知，梁的抗弯截面系数越大，梁能承受的弯矩就越大。因此，梁的合理截面形状应当是，截面面积较小，而抗弯截面系数较大。或者说合理的截面形状应当是其抗弯截面系数与截面面积的比值 W_z/A 尽可能地大。工程上常用这个比值来衡量截面的合理性。表 6-1 列出了几种常用截面的 W_z 与 A 的比值，由此表可见，工字形、槽形截面较合理，箱形次之，圆形最差。因为弯曲正应力沿截面高度线性分布，离中性轴越远处弯曲正应力越大，工字形截面使较多的材料处于高应力区，能充分发挥材料的潜力。工字形截面可理解为由矩形截面靠近中性轴附近的部分材料移至梁的上、下边缘附近去而得，如图 6.19 所示，增大了 W_z/A 的数值，从而提高了梁的弯曲强度。而圆形截面则恰恰相反，它在中性轴附近聚集了较多的材料，W_z/A 值最小，而中性轴附近正应力很小，不能充分发挥材料的强度。箱形截面和圆环形截面也可视为矩形和圆形截面的改进。

表 6-1 常用截面的 W_z 与 A 的比值

截面形状	圆形	矩形	工字形、槽形
W_z/A	$0.125d$	$0.167d$	$(0.27-0.31)d$

注：d 为直径，h 为高。

在选取梁的合理截面形状时，还应考虑材料的特性。对抗拉和抗压强度相同的材料(如低碳钢)，宜采用与中性轴对称的截面，如圆形、矩形、工字形等，以使截面上、下边缘处的最大拉应力和最大压应力相等，且同时接近许用应力。对于抗压强度大于抗拉强度的材料(如铸铁)，宜采用中性轴偏于受拉侧的截面(如图 6.20 所示的几种截面)，而且应使 y_t 与 y_c 接近下列关系

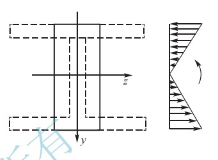


图 6.19 工字形截面简图

$$\frac{\sigma_{tmax}}{\sigma_{cmax}}=\frac{M_{max}y_t}{I_z}\Big/\frac{M_{max}y_c}{I_z}=\frac{y_t}{y_c}\leqslant\frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}$$

这样可使最大拉应力与最大压应力同时接近其许用值。

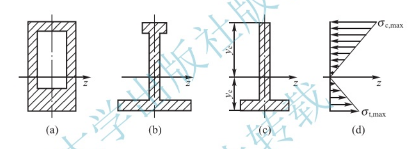


图 6.20 中性轴不对称的几种截面正应力分布

3. 采用变截面梁

前面讨论的是等截面梁，是根据最大弯矩所在截面的强度条件来确定整个梁的截面尺寸的。显然，等截面梁除了最大弯矩所在截面外，其他各截面上的应力均低于许用应力，材料未能充分利用。为了节省材料，减轻梁的自重，可将梁设计成变截面的，即在弯矩较大处，采用较大截面，弯矩较小处采用较小截面。如果将变截面梁设计成使每一横截面上的最大正应力都等于许用应力，则这样的梁就称为等强度梁。

设梁上某横截面上的弯矩为 $M(x)$，该截面的抗弯截面模量为 $W_z(x)$，根据等强度梁的要求应满足

$$\sigma(x)_{max}=\frac{M(x)}{W(x)}=[\sigma]$$

即

$$W_z(x)=\frac{M(x)}{[\sigma]} \tag{6-22}$$

式(6-22)为等强度梁的设计依据。从节省材料、减轻自重角度看，等强度梁最合理。但考虑到施工、制作要求和抗剪切强度要求等原因，实际采用的等强度梁还须在用式(6-22)设计的基础上加以改进，如图 6.21 所示的房屋的雨篷、阳台，汽车的叠板弹簧，桥梁的鱼腹梁，机械的变截面轴等都具有等强度梁的概念。

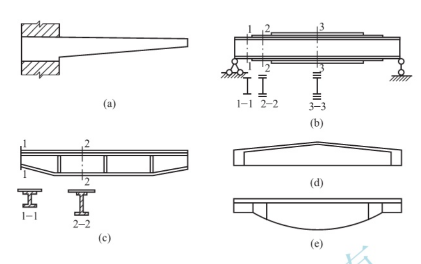


图 6.21　工程中常用的几种变截面梁

必须指出，以上这些措施都是从提高弯曲强度的角度提出的。但在工程实际中，设计一个构件还应考虑刚度、稳定性、加工制造等多方面因素，应经过综合考虑比较后，再确定梁的截面形状和结构形式。



小　结

1. 纯弯曲与横力弯曲

弯曲时梁的各个横截面上剪力都等于零，弯矩为常量，这种变形称为纯弯曲。若弯曲时各横截面上既有剪力又有弯矩，这种弯曲称为横力弯曲。

2. 中性层与中性轴

(1) 中性层：梁弯曲变形时，有一层纵向纤维既不伸长、也不缩短，这一层纤维称为中性层。

(2) 中性轴：中性层与横截面的交线称为中性轴。梁弯曲变形时，各横截面均绕中性轴发生转动。横截面中性轴上各点正应力都等于零。

(3) 中性轴的位置：直梁平面弯曲时，中性轴过形心且垂直于荷载作用面。

3. 梁横截面上的正应力及强度条件

(1) 正应力公式

梁弯曲时各截面是绕其中性轴发生相对转动的。根据几何关系、物理关系、静力学关系可以推导出梁纯弯曲时横截面上任意点处的正应力计算公式，即 $\sigma=\frac{M_y}{I_z}$。

横截面上各点正应力沿截面高度按线性规律变化，沿截面宽度均匀分布，中性轴上各点的正应力为零。截面的上、下边缘上各点正应力为最大，最大值为 $\sigma_{max}=\frac{M}{W_z}$。

式 $\sigma=\frac{My}{I_z}$ 和式 $\sigma_{max}=\frac{M}{W_z}$ 的适用范围为：①平面弯曲；②纯弯曲或细长梁的横力弯曲($l\geqslant 5h$ 的梁属于细长梁)；③最大应力不超过材料的比例极限。

(2) 常用截面的惯性矩 I_z 和抗弯截面系数 W_z

I_z是截面对中性轴 z 轴的惯性矩，W_z称为抗弯截面系数，$W_z=I_z/y_{\max}$。

矩形截面：$I_z=\dfrac{bh^3}{12}$，$W_z=\dfrac{bh^2}{6}$，其中，b 是与中性轴 z 平行的边长(宽度)；h 为垂直于中性轴的边长(高度)。

圆形截面：$I_z=\dfrac{\pi D^4}{64}$，$W_z=\dfrac{\pi D^3}{32}$，其中，D 是圆杆的直径。

空心圆形截面$\left(\text{内外径之比，}\alpha=\dfrac{d}{D}\right)$：$I_z=\dfrac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4)$，$W_z=\dfrac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$，其中，$D$ 是圆管杆的外直径，d 是圆管的内直径。

(3) 弯曲正应力的强度条件

弯曲正应力的强度条件是：梁的最大弯曲正应力不得超过材料的许用弯曲正应力，即 $\sigma_{\max}\leqslant[\sigma]$。利用这个强度条件可解决截面弯曲正应力强度校核、截面尺寸设计和求许用荷载三方面的问题。

4. 梁横截面上的切应力及强度条件

(1) 矩形截面梁的切应力

矩形截面梁的切应力计算公式为 $\tau=\dfrac{F_S S_z^*}{I_z b}$。其中 S_z^* 为距中性轴 y 处的横线与截面边缘之间的面积，对于中性轴的静矩，即 $S_z^*=\dfrac{b}{2}\left(\dfrac{h^2}{4}-y^2\right)$。矩形截面梁的切应力沿截面高度按抛物线规律变化，沿截面宽度均匀分布，中性轴上各点的切应力为最大，最大值为该截面平均切应力的 1.5 倍。横截面上、下边缘上各点的切应力为零。

(2) 其他截面梁的最大切应力

工字型钢截面 $$\tau_{\max}=\frac{F_S}{\dfrac{I_z}{S_{z,\max}^*}d}=\frac{F_S}{A_{\text{腹板}}}$$

圆形截面 $$\tau_{\max}=\frac{4}{3}\frac{F_S}{A}$$

薄壁圆环形截面 $$\tau_{\max}=2\frac{F_S}{A}$$

(3) 弯曲切应力的强度条件是：梁的最大弯曲切应力不得超过材料的许用弯曲切应力，即 $\tau_{\max}\leqslant[\tau]$。利用这个强度条件可解决弯曲切应力强度校核、截面尺寸设计和求许用荷载三方面的问题。塑性材料制成的梁，正应力最大的点就是危险点，不必区分拉或压。而脆性材料制成的梁，必须分别对最大拉应力和最大压应力所在的点作强度计算，这是因为脆性材料的抗拉和抗压性能不同。

5. 提高梁弯曲强度的措施

(1) 合理布置梁上荷载和支座位置；

(2) 合理选用梁的截面形状；

(3) 采用变截面梁。

思　考　题

6.1　何谓纯弯曲？推导弯曲正应力公式时，作了哪些假设？它们的根据是什么？有

什么作用?

6.2　何谓中性层？何谓中性轴？如何确定中性轴的位置？

6.3　如图 6.22 所示的两梁，除截面形状不同外，其他条件皆相同。问：在相同的横截面上，它们的内力是否相同？应力是否相同？

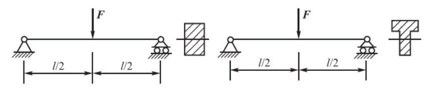


图 6.22　思考题 6.3 图

6.4　试判断下列概念的区别：纯弯曲与横力弯曲；中性轴与形心轴；惯性矩与极惯性矩；抗弯刚度与抗弯截面系数。

习　　题

6.1　简支梁受力和有关尺寸如图 6.23 所示。试计算：

(1) 1-1 截面 A-A 线上 1、2 两点的正应力。(2)全梁的最大正应力。

6.2　如图 6.24 所示割刀在切割工件时，受到切削力 $F=1$kN 作用，试求割刀内最大弯曲正应力。

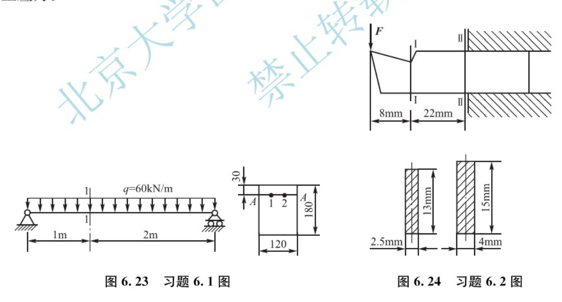


图 6.23　习题 6.1 图　　　　图 6.24　习题 6.2 图

6.3　由 16a 号槽钢制成的外伸梁，受力和尺寸如图 6.25 所示。试求梁的最大拉应力和最大压应力，并指出其所在位置。

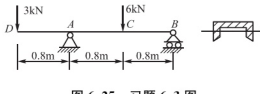


图 6.25　习题 6.3 图

6.4　简支梁承受均布荷载作用，如图 6.26 所示，若分别采用截面面积相等的实心截面和空心截面梁，且 $D_1=40$mm，$\dfrac{d_2}{D_2}=\dfrac{3}{5}$，试分别计算它们的最大正应力。并问空心截面梁比实心截

面梁的最大正应力减少了百分之几。

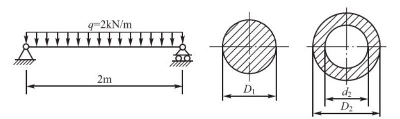


图 6.26　习题 6.4 图

6.5　某圆轴的外伸部分系空心圆截面，荷载情况如图 6.27 所示。试求轴内最大正应力。

6.6　一矩形截面悬臂梁，受力状态如图 6.28 所示，已知宽度为 b，高度为 h，且知 $h=1.5b$，材料的许用应力为 $[\sigma]=10\text{MPa}$，$q=10\text{kN/m}$，$l=4\text{m}$。试按强度条件设计梁的截面尺寸。

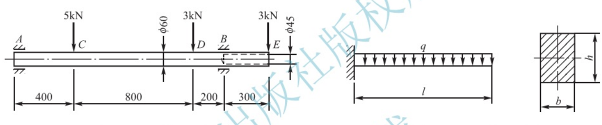


图 6.27　习题 6.5 图　　图 6.28　习题 6.6 图

6.7　20 号工字梁的支承和受力状态如图 6.29 所示，材料的许用应力为 $[\sigma]=160\text{MPa}$。试按强度条件求许可荷载 F。

6.8　一矩形截面外伸梁，受力和尺寸如图 6.30 所示，材料的许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$。试按下列两种情况校核此梁强度：(1)使梁的 120mm 边竖直放置；(2)使梁的 120mm 边水平放置。

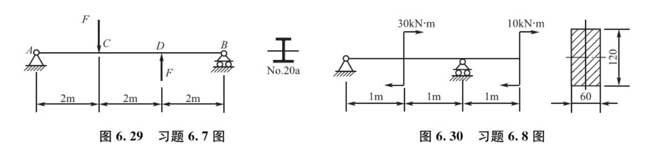


图 6.29　习题 6.7 图　　图 6.30　习题 6.8 图

6.9　四轮拖车的载重量为 40kN，设每一车轮所受的重量相等，每根轴的受力和尺寸如图 6.31 所示。若轴的直径 $d=85\text{mm}$，材料的许用应力 $[\sigma]=50\text{MPa}$。试校核轴的强度。

6.10　一球墨铸铁做的简支梁，受力和截面形状尺寸如图 6.32 所示。(1)试作出最大正弯矩和最大负弯矩截面上的正应力分布图(标明应力数值)；(2)求梁中最大拉应力和最大压应力。

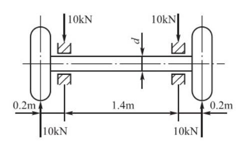


图 6.31　习题 6.9 图

6.11　简支梁受力和尺寸如图6.33所示，材料的许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$。试按正应力强度条件设计三种形状截面尺寸：(1)圆形截面直径 d；(2)$h/b=2$ 矩形截面的 b、h；(3)工字形截面。并比较三种截面的耗材量。

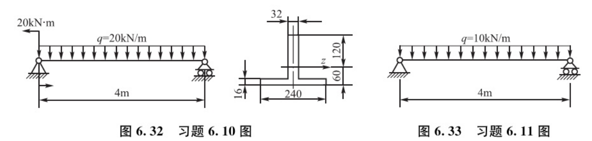


图6.32　习题6.10图　　　图6.33　习题6.11图

6.12　如图6.34所示，欲从直径为 d 的圆木中截取一矩形截面梁，且要使其抗弯截面系数最大。试求出矩形截面最合理的高、宽尺寸。

6.13　铸铁梁截面为T形，如图6.35所示。已知材料的 $[\sigma_t]=30\text{MPa}$，$[\sigma_c]=90\text{MPa}$。试根据截面形状最为合理的要求，确定尺寸 δ。

6.14　由10号工字钢制成的钢梁 AB，在 D 点由圆钢杆 CD 支承，如图6.36所示，已知梁和杆的许用应力均为 $[\sigma]=160\text{MPa}$。试求均布荷载的许可值及圆杆直径 d。

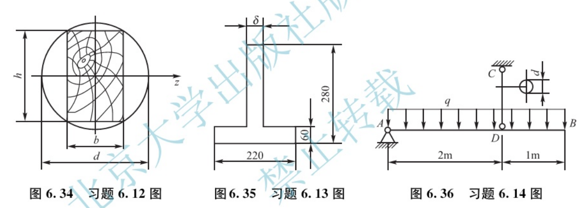


图6.34　习题6.12图　　图6.35　习题6.13图　　图6.36　习题6.14图

6.15　如图6.37所示悬臂木梁由三块截面为50mm×100mm的木板胶合而成，自由端受集中力 $F=4.2\text{kN}$ 作用。若胶合缝的许用切应力 $[\tau]=0.4\text{MPa}$，试校核胶合缝的剪切强度。

6.16　槽形截面悬臂梁，受力和尺寸如图6.38所示。已知截面对形心轴 z 的惯性矩 $I_z=1.017\times10^8\text{mm}^4$，材料的 $[\sigma_t]=50\text{MPa}$，$[\sigma_c]=120\text{MPa}$，$[\tau]=30\text{MPa}$，$F=30\text{kN}$，$M=70\text{kN}\cdot\text{m}$。试校核梁的强度。

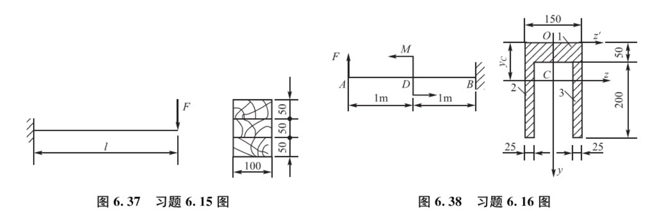


图6.37　习题6.15图　　　图6.38　习题6.16图